Grenzwert einer Fkt.

Sei $f(x) = x^2$

Betrachten Annäherung an $x_0 = 2$.

↳ <u>Idee:</u> Folge von x-Werten mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

⟶ Folge von Fkt.-Werten: $(f(x_n))$.

Bsp:

x_n	1.9	1.99	...
$f(x_n)$	3.61	3.9601	...

Sehen: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = 4$

(Hätten auch andere x-Werte wählen können,
Bsp: 1.95, 1.995, 1.9995, ...)

I.e. wir sehen:

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 4$.

symbolisch: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\(x<2)}} x^2}_{\text{Grenzwert einer Fkt.}}$

$x<2$: Linksseitiger Grenzwert

Analog: Annäherung an $x_0 = 2$ von rechts.

Bsp: $(x_n) = 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots$

$\longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\(x>2)}} x^2 = 4$

Rechtsseitigen Grenzwert

Links- & rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein, man schreibt: $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

<u>Allgemein:</u>

> Sei $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 definiert. Sei (x_n) eine Folge mit:
>
> $$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$
>
> und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$,
>
> so heisst g <u>Grenzwert</u> von $f(x)$ an der Stelle x_0.
>
> Notation: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$

Wichtig: (i) $f(x)$ muss bei $x = x_0$ nicht definiert sein.

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} \ldots$: x kommt x_0 beliebig nahe, aber es gilt immer $x \neq x_0$.

(iii) Fkt. kann auch nur linksseitigen oder rechtsseitigen Grenzwert besitzen.

Bsp: (i) $\lim\limits_{x \to 3} e^x = e^3$

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ $x = 2$ setzen gilt nicht, da $f(2)$ nicht def.

Wir wählen Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 2$.

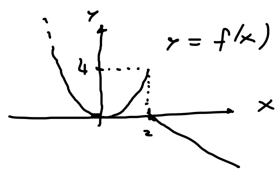
$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n^2 - 2x_n}{x_n - 2} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n(x_n - 2)}{x_n - 2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} x_n = 2$$

Wir schreiben die Rechnung als:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x = 2.$$

(iii) Sei $f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x < 2 \\ 2 - x & : \quad x \geq 2 \end{cases}$



Linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} x^2 = 4$$

Rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} 2 - x = 0$$

$\longrightarrow$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ex. nicht!

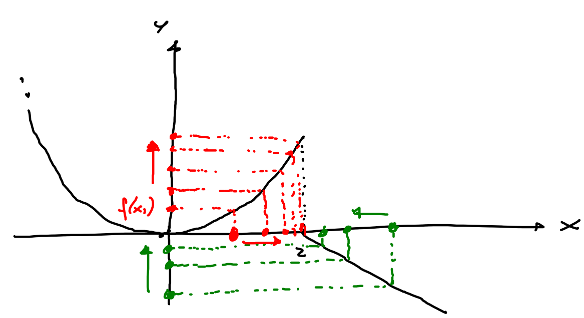
Bemerkungen:

(i) Notation:

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x>2)}} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x<2)}} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

(ii) Graphische Interpretation:



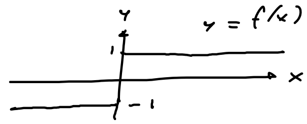
Aufgabe: Sei $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Man bestimme: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

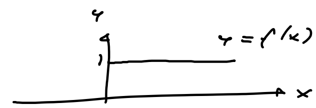
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Lösg. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$



Bsp: $f(x) = \begin{cases} 0 : & x < 0 \\ 1 : & x \geq 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq f(0)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$

Aufgabe:

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(ii) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

(iii) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 3x + 2}$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

Lösg: (i) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 4$

(ii) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}$

$= \lim\limits_{x \to -1} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{-2}{1} = -2$

(iii) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\sqrt{4} - 1}{4^2 + 3 \cdot 4 + 2} = \ldots$

(iv) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1 + x} - 1)(\sqrt{1 + x} + 1)}{x(\sqrt{1 + x} + 1)}$

[ein Trick!] $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$

Grenzwert für $x \longrightarrow \pm \infty$

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$

Idee: Folge x_n mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

$f(x_n) = \frac{1}{x_n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

wir schreiben: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

Bsp: $f(x) = e^{-3x} + 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$

Aufgabe:

(i) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$

(ii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x^3}{x^2+2x^3} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x^3}+1}{\frac{1}{x}+2} = \frac{1}{2}$

(iii) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} = \infty$

(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x^2}} = -\infty$