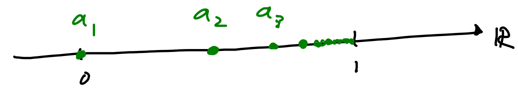
Grenzwert & Stetigkeit einer Fkt.

Relle Zahlenfolgen:

Bsp: $(a_n) = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

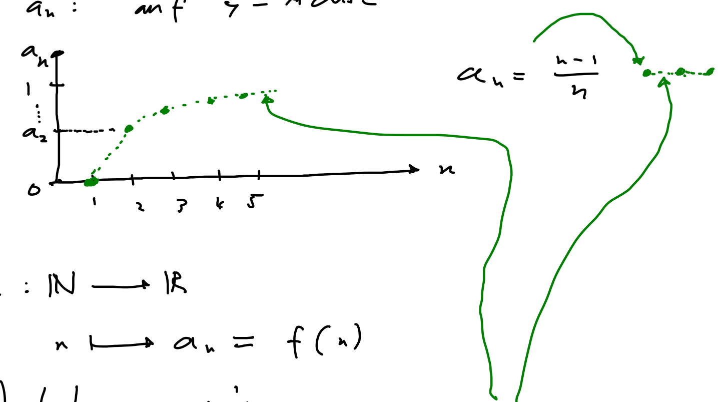
Formel für n-tes Glied: $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Graphische Darstellung: (i)



(ii) n: auf x-Achse

a_n: auf y-Achse



Def.: Eine Folge ist Fkt. von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$:

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n = f(n)$$

Bem: Mit $f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ bekommen wir die einhüllende Kurve

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

Zwei Möglichkeiten um Folge zu definieren:

(i) **explizit:** a_n als Fkt. von n

Bsp: $a_n = \frac{n}{1+n^2}$

(ii) **implizit:** Durch Rekursionsformel:

Bsp: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$

Aufgabe: Man bestimme die ersten 5 Glieder der Folgen (i), (ii). (i.e. für $n = 1, 2, \dots, 5$).

Lösg: (i) $a_1 = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3}{10}$; $a_4 = \frac{4}{17}$

$a_5 = \frac{5}{26}$

(ii) $a_1 = 1$; $a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

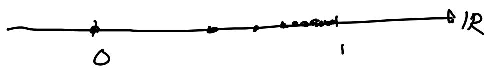
$a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

Grenzwert einer Folge

Frage: Streben die Glieder der Folge:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$$

gegen einen Wert, resp. gegen eine Zahl?



Ja, die Glieder streben gegen 1.

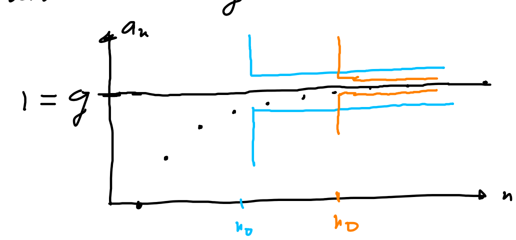
1 ist der Grenzwert der Folge,

man schreibt: $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = 1}$ ("Lim" für Limes)

Eine Folge heisst konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, sonst heisst sie divergent.

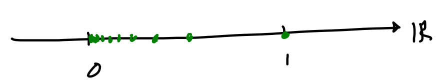
Arbeitsdefinition: $\boxed{\text{Wir sagen } \lim_{n\to\infty} a_n = g, \text{ falls wir } a_n \text{ beliebig nahe zu } g \text{ bringen können wenn wir } n \text{ genügend gross wählen.}}$

Das heisst egal wie klein wir einen Abstand zu g wählen, es gibt immer ein n_0, so dass die Folge einen kleineren Abstand zu g hat ab dem Element a_{n_0}.



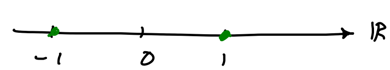
$\left(a_n = \frac{n-1}{n}\right)$

Beispiele: (i) $a_n = \frac{1}{n}$



$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(ii) $a_n = (-1)^n \longrightarrow (a_n) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$



Hat keinen Grenzwert! $\longrightarrow$ divergent.

[Folge hat höchstens einen Grenzwert!]

(iii) $a_n = n^2 \longrightarrow (a_n) = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$: Folge hat keine Zahl als Grenzwert

$\longrightarrow$ Folge ist <u>divergent</u>

[Folge hat <u>uneigentlichen Grenzwert</u>]

(iv) $a_n = \dfrac{1+n}{2+3n}$

$$\longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)\cdot\frac{1}{n}}{(2+3n)\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{2}{n}+3} = \frac{1}{3}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

<u>Satz:</u> Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen für welche ein Grenzwert ex.
Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad ;\left(\text{falls } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right)$$

<u>Aufgabe:</u>

Man bestimme den Grenzwert für $n \to \infty$:

(i) $a_n = \dfrac{3+2n+4n^2}{5+3n+6n^2}$

(ii) $a_n = \dfrac{3+2n+4n^2}{5+2n}$ $\qquad a_{1000} = \dfrac{3+2\cdot 1000+4\cdot 1000^2}{\ldots}$

(iii) $a_n = \dfrac{3+2n+4n^2}{1+n^2+5n^3}$

<u>Lösg:</u> (i) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n+4n^2}{5+3n+6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n}+4}{\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n}+6} = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}}$$

(ii) $$\text{—— " ——} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n+4n^2}{5+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+2+4n}{\frac{5}{n}+2}$$

$$\longrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$$

(iii) $$\text{—— " ——} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+2n+4n^2}{1+n^2+5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^3}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}}{\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n}+5} = \underline{0}$$

Rigorose Def. von Konvergenz mit Bsp:

Eine Folge a_n konvergiert gegen g genau dann wenn:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n > n_0$ gilt: $|a_n - g| < \varepsilon$.

Bsp: Beweis von $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$:

Sei $\varepsilon > 0$, wir wählen $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Für $n > n_0$ folgt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\square$

Grenzwert einer Fkt.

Sei $f(x) = x^2$

Betrachte Annäherung an $x_0 = 2$.

Idee: Wähle Folge von x-Werten mit: $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

$\longrightarrow$ Folge von Funktionswerten: $f(x_n)$.

Bsp:

x_n	1.9	1.99	1.999	1.9999	....
$f(x_n)$	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	...

Wir sehen: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n^2 = 4$

⚠ Hätten auch andere x-Werte mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ wählen können. Bsp: $(x_n) = 1.95, 1.995, 1.9995, \ldots$

Wir folgern: Aus $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 = 2$

folgt: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 4$.

Symbolisch: $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ (x < 2)}} x^2} = 4$

Linksseitiger Grenzwert.