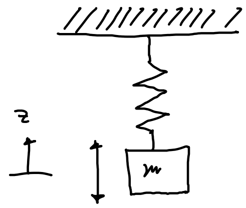
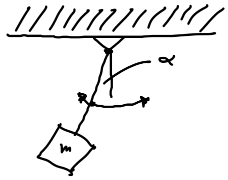
Harmonische Schwingungen

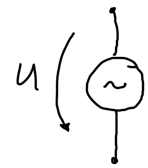
Bsp:



$z = A\cos(\omega_1 t)$



$\alpha = B\cos(\omega_2 t)$



$U = U_0 \cos(\omega_3 t)$

Allgemein wird so ein Vorgang beschrieben durch:

$$\boxed{f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

(oder mit $\sin(\dots)$).

A: Amplitude
ω: Kreisfrequenz
φ: Phase / Phasenwinkel

Physikalische Bedeutung:

$$f(t) = A\cos(\underline{\underline{\omega t}} + \varphi)$$
$$= A\cos(\omega t + 2\pi + \varphi)$$
$$= A\cos(\omega(\underline{\underline{t + \tfrac{2\pi}{\omega}}}) + \varphi) = f(t + \tfrac{2\pi}{\omega})$$

Wir sehen: $\underline{f(t) = f(t + \tfrac{2\pi}{\omega})} \longrightarrow \frac{2\pi}{\omega} = T$: Periodendauer

Frequenz: Anzahl Schwingungen pro Zeiteinheit:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Amplitude: Vorfaktor A

$$\mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$$
$$\mathrm{Im}(A\cos) = [-A, A]$$

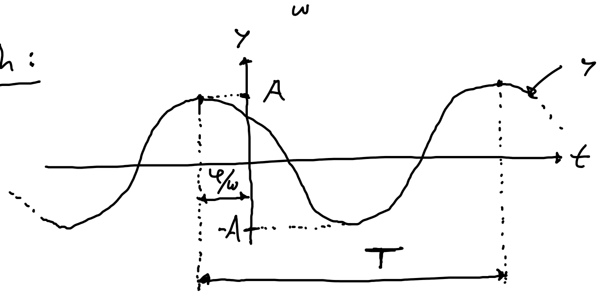
$\longrightarrow \pm A$ sind max. & min. Werte von $f(t)$.

Phase:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= A\cos(\omega(t + \tfrac{\varphi}{\omega}))$$

$\frac{\varphi}{\omega}$ ist Verschiebung des Graphen in der Zeit t.

Graph:



$y = A\cos(\omega t + \varphi)$

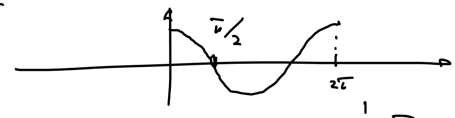
Hinweis: φ hat keine Einheit!

Aber: $\frac{\varphi}{\omega}$ hat Einheit der Zeit (Bsp: s)

$\longrightarrow \frac{\varphi}{\omega}$ ist zeitliche Verschiebung.

Alternative Darstellung:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$



$\left[\ \omega t \overset{!}{=} \frac{\pi}{2} \longrightarrow \underline{t = \frac{\pi}{2\omega}}\ \right]$

Wie umschreiben? Idee: $\boxed{t=0} \longrightarrow \underline{A\cos(\varphi) = a}$

$\boxed{t=\frac{\pi}{2\omega}} \longrightarrow \underbrace{A\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}_{=-A\sin(\varphi)} = \underline{b}$

$\underline{=-A\sin(\varphi)}$

I.e. wir finden:

$$\begin{cases} a = A\cos(\varphi) & (1) \\ b = -A\sin(\varphi) & (2) \end{cases}$$

Idee:

$\boxed{(1)^2+(2)^2} \longrightarrow a^2+b^2 = A^2\cos^2(\varphi) + A^2\sin^2(\varphi) = A^2 \longrightarrow \underline{A = +\sqrt{a^2+b^2}}$

Wahl.

$\boxed{-\frac{(2)}{(1)}} \longrightarrow -\frac{b}{a} = \tan(\varphi) \longrightarrow \underline{\varphi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)}$

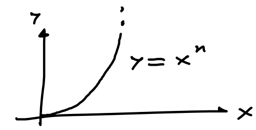
Wahl: $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\left[\ \frac{A\sin(\varphi)}{A\cos(\varphi)} = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)\ \right]$

Wurzelfunktionen

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Die Fkt. $f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$
$x \longmapsto y = x^n$



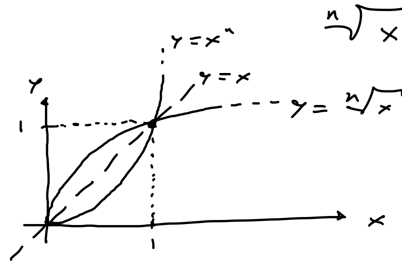
ist bijektiv. $\longrightarrow$ Umkehrfkt. ex.!

$f^{-1}\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$
$x \longmapsto y$, so dass $x = y^n$.

Wir definieren die <u>n-te Wurzelfunktion</u> als diese Umkehrfkt., i.e.

$$\sqrt[n]{x} = f^{-1}(x).$$

Graph:



⚠ $x^3 = -1$ hat Lösg. $x = -1$

aber $\sqrt[3]{-1}$ ex. nicht! (im reellen)

Einschub: <u>Summen</u> (schreibweise)

Seien $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$)

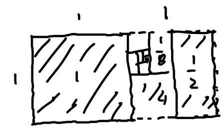
Die Summe dieser Zahlen kann (in kompakten Notation) geschrieben werden als : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Allgemein, für $m \leq n$: $\displaystyle\sum_{k=\boxed{m}}^{\boxed{n}} a_k = a_{\boxed{m}} + a_{\boxed{m+1}} + a_{\boxed{m+2}} + \dots + a_{\boxed{n-1}} + a_{\boxed{n}}$

Bsp:

(i) $a_k = \frac{1}{k} \longrightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$

(ii) $a_k = \frac{1}{2^k} \longrightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots \; (= 2.)$



(iii) Summe der Elemente der Menge : $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$\sum_{k=0}^{4} 2k+1 = \underbrace{(2\cdot 0+1)}_{=1} + \underbrace{(2\cdot 1+1)}_{=3} + \underbrace{(2\cdot 2+1)}_{=5} + \dots + \underbrace{(2\cdot 4+1)}_{=9}$$

(iv) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

Umbenennung Index

Verschiebung Index

(v) $$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

Polynom n-ter Ordnung.

Einschub : Fakultät

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Man definiert : n Fakultät, geschrieben : $n!$

durch :

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n$$
$$0! = 1$$

(Bsp : $10! = 3'628'800$

$60! \approx 8.321 \cdot 10^{81}$)

Binomialkoeff. : $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Bsp: $$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Einfache Darstellung: $\binom{n}{k}$

Pascalsches Dreieck:

$k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$ ...

$n=0$: $\binom{0}{0}$

$n=1$: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$n=2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$n=3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$n=4$

⋮

Ausgerechnet:

1

1 1

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$

1 4 6 4 1

⋮

Binomialentwicklung:

$$(a+b)^2 = \boxed{1}a^2 + \boxed{2}ab + \boxed{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \boxed{1}a^3 + \boxed{3}a^2b + \boxed{3}ab^2 + \boxed{1}b^3$$

⋮

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$