ANALYSIS 1
VERSION 15. Oktober 2020

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Mengenlehre

1.1. **Grundbegriffe.** Unter einer *Menge* verstehen wir die Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, *Elemente* genannt, zu einer Einheit. Beschreibende Darstellungsform:

$$M = \{x | x \text{ besitzt die Eigenschaften } E_1,\ E_2, \ldots, E_n\},$$

aufzählende Form:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}.$$

Mengen mit unendlich vielen Elementen, wie zum Beispiel die Menge der reellen Zahlen, sind möglich. Im folgenden bezeichnen wir die reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. $a \in A$ bedeutet a ist Element von A, $a \notin A$ bedeutet a ist kein Element von A. Die *leere Menge* wird mit $\{\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet. Eine Menge A heisst *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, geschrieben $A \subset B$.

Als Beispiel betrachten wir die Teilmengen der Menge $B = \{a, b, c\}$. Die acht Teilmengen sind

$$\begin{aligned}
P &= \{a\}, & Q &= \{b\}, & R &= \{c\}, \\
S &= \{a, b\}, & T &= \{b, c\}, & U &= \{a, c\}, \\
V &= \{\}, & W &= \{a, b, c\}.
\end{aligned}$$

Für jede Menge B gilt:

(i) Die leere Menge ist immer eine Teilmenge der Menge B.
(ii) Die Menge B ist eine Teilmenge der Menge B.
(iii) Besteht die Menge B aus n Elementen, so besitzt die Menge B genau 2^n Teilmengen.

Im folgenden werden wir häufig Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachten. *Intervalle* sind zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen. Wir verwenden dafür die Notationen

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, \\
(\infty, \infty) &= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Man nennt ein Intervall der Form (a, b) *offenes Intervall* und ein Intervall der Form $[a, b]$ *abgeschlossenes Intervall.*

1.2. **Mengenoperationen.**

1.2.1. *Schnittmenge.* Die Menge $A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$ heisst *Schnittmenge* der Mengen A und B.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Lösungsmenge des Ungleichungssystems:

$$\begin{cases} 2x - 4 < & 8 \\ x + 1 > & -2 \end{cases}$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $x < 6$. Wir bezeichnen die Menge der x welche die erste Ungleichung erüllt mit $\mathbb{L}_1$. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 &= \{x | x \in \mathbb{R}, x < 6\} \\ &= (-\infty, 6). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt $x > -3$. Wir bezeichnen nun die Menge der x welche die zweite Ungleichung erfüllt mit $\mathbb{L}_2$. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2 &= \{x | x \in \mathbb{R}, x > -3\} \\ &= (-3, \infty). \end{aligned}$$

Die Lösung des Ungleichungssystems ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \\ &= \{x | x \in \mathbb{R}, x < 6, x > -3\} \\ &= (-3, 6). \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel dient das Ungleichungssystem (siehe Unterricht)

$$\begin{cases} x^2 \leq 9 \\ 2x - 3 \leq 1 \end{cases}$$

1.2.2. *Vereinigungsmenge.* Die Menge $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die *Vereinigungsmenge* der Mengen A und B.

Als Beispiel betrachten wir die folgenden beiden Ungleichungen

$$x^2 \geq 1, \qquad 2x > -4.$$

Welche x erfüllen mindestens eine der beiden Ungleichungen? Die erste Ungleichung ergibt $x \geq 1$ oder $x \leq -1$. Die zweite Ungleichung ergibt $x > -2$. Somit haben wir

$$\mathbb{L}_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \mathbb{L}_2 = (-2, \infty)$$

und für die Lösungsmenge des Ungleichungssystems erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \\ &= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.3. *Differenzmenge.* Die Menge $A \backslash B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ ist die *Differenzmenge* der Mengen A und B.

Beispiel: Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null ist $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null ist $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann ist $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0 \backslash \{0\}$.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Definitionsbereich (als Teilmenge der reellen Zahlen) der Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)x(x+3)}, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}.$$

Da Division durch Null nicht erlaubt ist sehen wir dass $f(x)$ nicht definiert ist für $x = -3, 0, 1$. Somit ist der Definitionsbereich von $f(x)$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, 0, 1\}.$$

Man sagt $f(x)$ besitze bei $x = -3, 0, 1$ *Definitionslücken.* Allerdings kann wegen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{x}{(x-1)(x+3)},$$

die Definitionslücke bei $x = 0$ behoben werden und es gilt $f(0) = 0$. Da für reelle Funktionswerte das Argument der Wurzel nicht negativ sein darf ist $g(x)$ nur für $x \geq 0$ definiert. Der Definitionsbereich von $g(x)$ ist somit

$$\mathbb{D}_g = [0, \infty) \backslash \{1\}.$$

1.3. **Betrag einer reellen Zahl.** Der *Betrag* einer reellen Zahl a ist durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

definiert. Beispiele: $|7| = 7$, $|-9| = 9$. Die Lösung der Ungleichung $|x - 7| \leq 2$ ist $\mathbb{L} = [5, 9]$. Die Lösung der Ungleichung $|x + 5| \leq 2$ ist $\mathbb{L} = [-7, -3]$. Der Betrag der Differenz von $a - b$, also $|a - b|$ ist der Abstand (positiv) zwischen den Zahlen a und b.

2. Funktionen

2.1. **Definition der Funktion.** Unter einer *Funktion* f versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge D genau ein Element y einer Menge B zuordnet. x nennt man *unabhängige Variable* oder *Argument.* y nennt man *abhängige* Variable oder *Funktionswert.* D heisst *Definitionsbereich* und B *Bildbereich* der Funktion. Die Menge aller Werte von f nennt man *Bild* von f und sie wird mit $\mathrm{Im}(f)$ bezeichnet. $\mathrm{Im}(f)$ ist eine Teilmenge von B und muss nicht gleich B sein i.e. $\mathrm{Im}(f)$ kann eine *echte* Teilmenge von B sein.

Beispielsweise die Funktion $y = \sin(x)$ ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $y \in \mathbb{R}$ zu. Die Funktionswerte von $\sin(x)$ sind aber das Intervall $[-1, 1]$, i.e. $\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$.

Wir verwenden die Notation:

$$\begin{aligned} f : D &\to B \\ x &\mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Wir definieren die *Funktion einer Menge* als

$$f(A) = \{f(x) \in B | x \in A\}.$$

Wir sehen dass $f(A) \subset B$.

Im folgenden betrachten wir Funktionen deren Definitionsbereich und Bildbereich jeweils eine Teilmenge der reellen Zahlen sind.

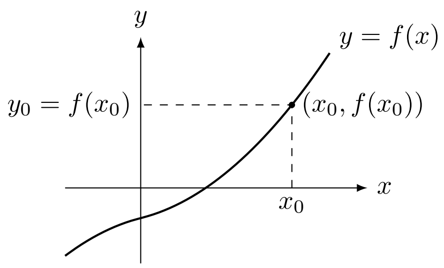
Wir können Funktionen auf verschieden Arten definieren/darstellen.

(i) Durch eine Gleichung oder Formel, z.B. $y = 2x - 1$. Dies ist die *analytische Darstellungsform.*

(ii) Eine weitere Darstellungsform einer Funktion ist die *Wertetabelle.* Diese findet zum Beispiel bei Messungen oder Auswertungen von Simulationen Anwendung. Beispiel:

x	-2	0	1	3	...
y	-5	-1	1	5	...

(iii) Es ist auch möglich die Funktion *graphisch* darzustellen. Jedem Wert $x_0 \in D$ ordnet die Funktion einen Wert $y_0 = f(x_0) \in B$ zu. Somit lassen sich Wertepaare $(x_0, f(x_0))$ bilden. Diese Wertepaare kann man als Koordinaten für Punkte in der Ebene verwenden. Die Menge aller solcher Punkte bildet den *Funktionsgraphen.* Auf diese Weise wird die Funktion veranschaulicht.



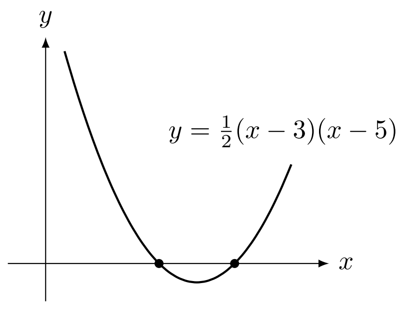
Beispiele zu grösstmöglichem Definitionsbereich und Bild einer Funktion: Die Funktion $y = x^2 + 2$ besitzt den grösstmöglichen Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und das dazugehörige Bild ist $[2, \infty)$. Die Funktion $y = \sqrt{x-3}$ besitzt den grösstmöglichen Definitionsbereich $D = [3, \infty)$ und das dazugehörige Bild ist $[0, \infty)$.

Wird nichts anderes vermerkt, ist im folgenden bei einer Betrachtung des Definitionsbereiches einer Funktion immer der grösstmögliche Definitionsbereich gemeint. Analog wird, wenn nichts anderes vermerkt ist, mit dem Bild einer Funktion immer das Bild bezogen auf den grösstmöglichen Definitionsbereich gemeint.

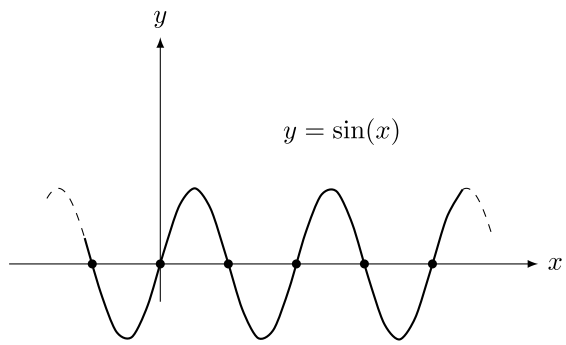
2.2. **Allgemeine Funktionseigeschaften.**

2.2.1. *Nullstellen.* Eine Funktion $f(x)$ besitzt an der Stelle x_0 eine *Nullstelle*, falls $f(x_0) = 0$ gilt. Beispiele:

(i) Die Funktion $f(x) = mx + b$ hat bei $x_0 = -\frac{b}{m}$ eine Nullstelle.
(ii) Die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)(x-5)$ hat Nullstellen $x_1 = 3$, $x_2 = 5$.
(iii) Die Funktion $h(x) = \sin(x)$ hat Nullstellen $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



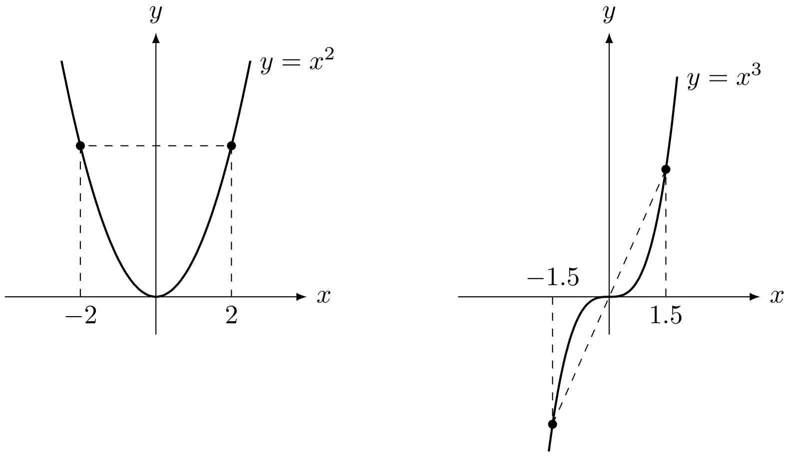
Nullstellen bei $x = 3, 5$



Nullstellen bei $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

2.2.2. *Symmetrieverhalten.* Eine Funktion $f(x)$ heisst *gerade* Funktion, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt $f(-x) = f(x)$. Eine Funktion heisst *ungerade* Funktion, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt $f(-x) = -f(x)$. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist ein Beispiel einer geraden Funktion, die Funktion $f(x) = x^3$ ist ein Beispiel einer ungeraden

Funktion.



Gerade Funktionen sind spiegelsymmetrisch bezüglich einer Spiegelung an der y-Achse. Ungerade Funktionen sind punktsymmetrisch bezüglich einer Punktspiegelung am Ursprung.

2.2.3. *Monotonie.* Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich D. Seien im folgenden x_1 und x_2 Elemente in D mit $x_1 < x_2$. Die Funktion $f(x)$ heisst *streng monoton wachsend* wenn $f(x_1) < f(x_2)$ und *streng monoton fallend* wenn $f(x_1) > f(x_2)$. Die Funktion $f(x)$ heisst *monoton wachsend* wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ und *monoton fallend* wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$.

2.2.4. *Periodizität.* Eine Funktion $f : D \to B$ ist *periodisch* mit Periode p, falls $D = \mathbb{R}$ und $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Typische Beispiele für periodische Funktionen sind $\sin(x)$ und $\cos(x)$ mit Periode 2π. Lässt man den ersten Teil der Definition weg, so ist auch die Funktion $\tan(x)$ periodisch mit Periode $p = \pi$.

2.2.5. *Operationen mit Funktionen.* Sei $f, g : X \to \mathbb{R}$. Dann sind die üblichen Operationen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Operation nur möglich ist, falls $g(x) \neq 0$.

2.2.6. *Komposition von Funktionen.* Wir betrachten eine Funktion welche zu ihrem Argument zuerst 2 addiert und den erhaltenen Ausdruck quadriert. In einer Gleichung geschrieben erhalten wir $y = (x + 2)^2$. Diese Funktion können wir als Kombination der Funktionen $y = x + 2$ und $y = x^2$ schreiben. Benennen wir die Funktionen mit f und g, i.e. $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$ dann ist die kombinierte Funktion $g(f(x)) = (x + 2)^2$.

Allgemeiner: Haben wir $f : A \to B$ und $g : B \to C$ (der Bildbereich von f liegt im Definitionsbereich von g). Dann kann mann eine neue Funktion definieren durch

$$\begin{aligned} h : A &\to C \\ a &\mapsto h(a) = g(f(a)). \end{aligned}$$

Diese neue Funktion heisst *Komposition* oder *Hintereinanderschaltung* von f und g. Man benutzt die folgende Notation

$$h = g \circ f, \qquad h(a) = (g \circ f)(a).$$

Bildet man beispielsweise die Komposition der Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & \qquad g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 2x + 4, & x &\mapsto g(x) = x^3 \end{aligned}$$

erhält man

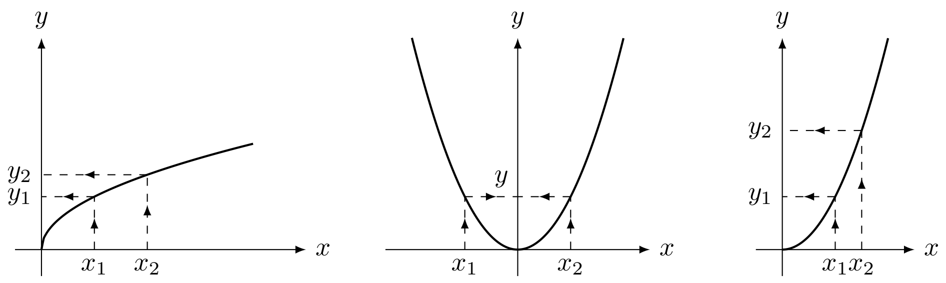
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2x^3 + 4, \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = (2x + 4)^3. \end{aligned}$$

Wir sehen dass im Allgemeinen die Komposition von Funktionen nicht kommutativ ist, i.e. im allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$.

2.2.7. *Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.* Sei $f : D \to B$ eine Funktion.

Die Funktion $f(x)$ heisst *injektiv* genau dann, wenn zwei verschiedene Elemente von D nicht auf dasselbe Element in B abgebildet werden. Äquivalent dazu ist: Aus $f(a) = f(a')$ folgt $a = a'$.

Gewisse Funktionen sind injektiv auf ihrem gesamten Definitionsbereich. Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ injektiv für $x \in [0, \infty)$. Die Funktion $g(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ ist nicht injektiv, da beispielsweise $g(2) = g(-2) = 4$. Schränkt man diese Funktion jedoch auf das Intervall $[0, \infty)$ ein so ergibt sich eine injektive Funktion.



$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \sqrt{x}$
injektiv

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2$
nicht injektiv

$h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2$
injektiv

Wir sehen an Hand der Graphen: Eine Funktion $y = f(x)$ ist genau dann injektiv wenn ihr Graph jede horizontale Gerade höchstens einmal schneidet. Streng monoton fallende und streng monoton wachsende Funktionen sind injektiv.

Die Funktion $f(x)$ heisst *surjektiv* genau dann, wenn jedes Element von B im Bild von D auftritt, i.e. $f(D) = B$.

Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = x^2$ nicht surjektiv da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = -3$. Wird als Bildbereich dieser Funktion jedoch die Menge der positiven reellen Zahlen inklusive Null gewählt (i.e. wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto y = x^2$), so ist die Funktion surjektiv. I.e. für jedes $y \in [0, \infty)$ gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ so dass $y = g(x)$ gilt. Die Einschränkung des Bildbereiches B einer Funktion $f : D \to B$ auf das Bild der Funktion $\mathrm{Im}(f)$ führt auf eine surjektive Funktion. I.e. jede Funktion $f : D \to \mathrm{Im}(f)$ ist surjektiv.

Die Funktion $f(x)$ heisst *bijektiv* genau dann, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Äquivalent dazu: Zu jedem $b \in B$ gibt es genau ein $a \in D$ mit $f(a) = b$. Dies führt auf den Begriff der inversen Funktion.

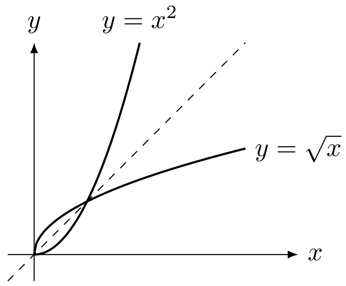
2.2.8. *Inverse Funktion.* Zu einer bijektive Funktion $f : D \to B$ gibt es eine *inverse Funktion*[1] $f^{-1} : B \to D$ mit $f(f^{-1}(y)) = y$ und $f^{-1}(f(x)) = x$. Formal wird dafür die folgende Notation verwendet: $f^{-1} \circ f = I$. Hier bedeutet I die *Identität*, das ist diejenige Funktion die das Argument unverändert lässt: $I(x) = x$. Die inverese Funktion wird auch *Umkehrfunktion* genannt. Bemerkung: Es gilt auch $f \circ f^{-1} = I$.

Sei zum Beispiel $f(x) = 3x - 2$, dann gilt $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$. Man berechnet die inverse Funktion indem man in der gegebenen Funktionsgleichung $y = f(x)$ einsetzt und die entstandene Gleichung nach x auflöst. Formales vertauschen von x und y liefert die Umkehrfunktion:

$$
\begin{aligned}
& & f(x) &= 3x - 2, \\
y = f(x)&: & y &= 3x - 2, \\
\text{auflösen nach x}&: & x &= \frac{y+2}{3}, \\
\text{formal vertauschen von } x \text{ und } y&: & y &= \frac{x+2}{3}, \\
\text{somit}&: & f^{-1}(x) &= \frac{x+2}{3}.
\end{aligned}
$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist nicht bijektiv und somit auch nicht umkehrbar. Die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist $f^{-1} = \sqrt{x}$. Grafisch kann man sich die Umkehrfunktion durch Spiegelung des Graphen an der Geraden $\{x = y\}$ konstruieren:

$$
\begin{aligned}
f : [0, \infty) &\to [0, \infty) \\
x &\mapsto y = x^2 \\[1em]
f^{-1} : [0, \infty) &\to [0, \infty) \\
x &\mapsto y = \sqrt{x}
\end{aligned}
$$



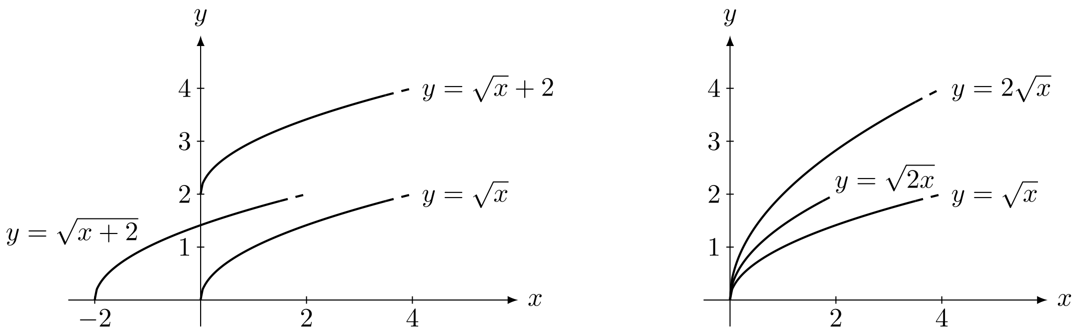
2.2.9. *Transformation von Funktionen.* Wir starten mit der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$. Nun betrachten wir eine neue Funktion $g(x)$ die durch $g(x) = f(x) + 2$ gegeben sei, i.e. $g(x) = \sqrt{x} + 2$. Wenn wir die Graphen der beiden Funktionen vergleichen stellen wir fest dass der Graph von $g(x)$ dem um den Wert 2 in Richtung positive y-Achse verschobenen Graphen von $f(x)$ entspricht.

Nun betrachten wir den Graphen der Funktion $h(x) = f(x + 2)$, i.e. $h(x) = \sqrt{x + 2}$. Wir sehen dass der Graph von $h(x)$ dem um den Wert 2 in Richtung negativer x-Achse verschobenen Graphen der Funktion $f(x)$ entspricht.

Nun betrachten wir den Graphen der Funktion $k(x) = 4f(x)$, i.e. $k(x) = 2\sqrt{x}$. Wir sehen dass der resultierende Graph dem vertikal (also in Richtung der y-Achse) um den Faktor zwei gestreckten Graphen von $f(x)$ entspricht.

[1] Das '-1' in f^{-1} ist kein Exponent, i.e. $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Schliesslich sehen wir dass die Funktion $l(x) = f(2x)$, ($l(x) = \sqrt{2x}$) dem um Faktor 2 in horizontale Richtung gestauchten Graphen von $f(x)$ entspricht.



Wir erweitern und verallgemeinern die Transformationen einer Funktion $f(x)$ in der folgenden Tabelle. In dieser Tabelle sei $C \geq 0$, $c > 1$

neue Funktion	Transformation von $f(x)$
$y = f(x+C)$	Horizontale Translation um den Wert C nach links
$y = f(x-C)$	Horizontale Translation um den Wert C nach rechts
$y = f(x)+C$	Vertikale Translation um den Wert C nach oben
$y = f(x)-C$	Vertikale Translation um den Wert C nach unten
$y = cf(x)$	Vertikale Streckung um Faktor c
$y = \frac{1}{c}f(x)$	Vertikale Stauchung um Faktor c
$y = f(cx)$	Horizontale Stauchung um Faktor c
$y = f(x/c)$	Horizontale Streckung um Faktor c
$y = -f(x)$	Spiegelung an der x-Achse
$y = f(-x)$	Spiegelung an der y-Achse

3. Ganzrationale Funktionen

Wir defnieren die *ganzrationalen Funktionen*, auch genannt *Polynomfunktionen*, als Funktionen der Form

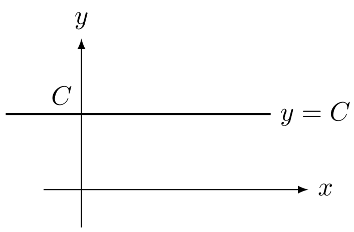
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Hier sind $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die *Polynomkoeffizienten*. Wir setzen $a_n \neq 0$ voraus. Den höchsten Exponenten n nennt man den *Polynomgrad*. Beispiele und zugehörige Bezeichungen:

$y = 4$	0. Grades	Konstante Funktion
$y = 2x - 3$	1. Grades	Lineare Funktion
$y = 2x^2 - 3x + 5$	2. Grades	Quadratische Funktion
$y = x^3 - x$	3. Grades	Kubische Funktion
$\vdots$		
$y = 4x^8 + 2x^2$	8. Grades	
$\vdots$		

Bemerkung: Das Studium der Polynomfunktionen ist wichtig weil sich viele naturwissenschaftliche und technische Vorgänge sehr gut durch Polynome approximieren lassen. Auch ist das Rechnen mit Polynomen einfach (siehe Differential- und Integralrechnung).

3.1. **Konstante Funktionen.** (Polynomfunktionen 0. Ordnung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = C$. Wobei wir hier und im folgenden mit dem grossen Buchstaben C eine Konstante bezeichnen. Bei einer konstanten Funktion wird jedem Argument der gleiche Wert zugeordnet.



Wichtige Beispiele treten auf bei der Beschreibung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit bei einer gleichförmigen Bewegung: $v(t) = C$ (wir bezeichnen hier die Geschwindigkeit mit v und die Zeit mit t) und bei der Beschreibung der Energie eines abgeschlossenen Systems in Abhängigkeit der Zeit: $E(t) = C$ (wir bezeichnen hier die Energie mit E).

3.2. **Lineare Funktionen.** (Polynomfunktionen 1. Ordnung) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = a_1 x + a_0$. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade. Beispiele:

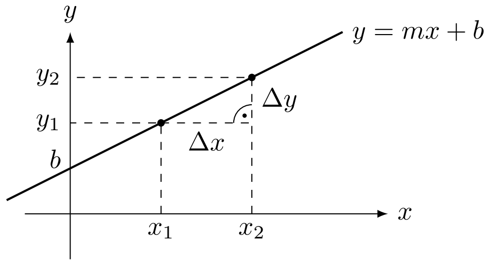
- (i) Zurückgelegter Weg s in Abhängigkeit der Zeit bei gleichförmiger Bewegung mit Geschwindigket $v(t) = C$: $s(t) = Ct + s_0$, wobei s_0 der Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ darstellt.
- (ii) Geschwindigkeit v in Abhängigkeit der Zeit beim freien Fall in Erdnähe, i.e. mit Erdbeschleunigung g (konstant): $v(t) = gt + v_0$, wobei v_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnet (die Anfangsgeschwindigkeit).
- (iii) Hooksches Gesetz: Der Verlauf der Spannung in Abhängigkeit der Dehnung für Materialien wie zum Beispiel Stahl folgt zu Beginn mit guter Näherung einem linearen Verlauf: $\sigma = E\delta$, wobei wir hier mit σ die Spannung, mit E den (konstanten) Elastizitätsmodul und mit δ die Dehnung bezeichnen.
- (iv) Linearisierung: Eine Funktion $f(x)$ kann (unter geeigneten Voraussetzungen) an einem Punkt $x = x_0$ linearisiert werden. Die Linearisierung beschreibt dann die Funktion $f(x)$ approximativ in einer Umgebung von $x = x_0$. (siehe Differentialrechnung).

Im folgenden werden wir alternative Formen zu $f(x) = a_1 x + a_0$ kennenlernen. Wir beschränken uns darauf die Funktionsgleichung $y = \ldots$ (oder eben Alternativen dazu) anzugeben und nehmen an der Definitions- und Bildbereich seien jeweils $\mathbb{R}$.

3.2.1. *Haupt-/Normalform.* Diese Form ist identisch mit $f(x) = a_1 x + a_0$, allerdings verwenden wir die Buchstaben m, b anstelle von a_1, a_0. Die *Haupt-/Normalform* ist somit $y = mx + b$. Man nennt m die *Steigung* und b den *y-Achsenabschnitt*. Nehmen wir an, der Graph gehe durch zwei (unterschiedliche) Punkte mit Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), dann erfüllt die Steigung m die Gleichung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Der y-Achsenabschnitt ist der Funktionswert an der Stelle $x = 0$. Im Falle $b = 0$ nennt man die Funktion eine *Proportion.*

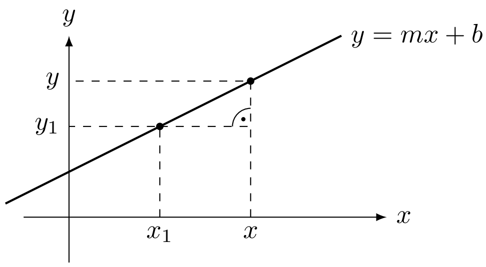


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

3.2.2. *Punkt-Steigungs-Form.* Wir nehmen an der Graph einer linearen Funktion besitzt die Steigung m und gehe durch den Punkt mit Koordinaten (x_1, y_1). Somit ist also der Parameter m in der Funktionsgleichung $y = mx + b$ direkt bekannt. Einsetzen der Koordinaten (x_1, y_1) ergibt $y_1 = mx_1 + b$, i.e. $b = y_1 - mx_1$. Somit ist die Funktionsgleichung

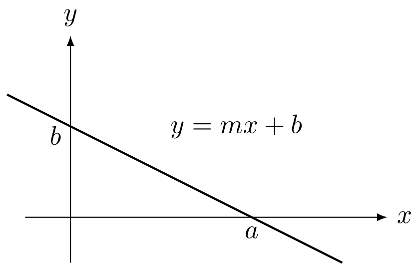
$$y = mx + (y_1 - mx_1).$$

Dies ist die Geradengleichung in *Punkt-Steigungs-Form.* Ein alternativer Weg diesen Ausdruck herzuleiten führt über die geometrische Betrachtung eines Steigungsdreieckes gegeben durch den Punkt mit Koordinaten (x_1, y_1) und einem beliebigen Punkt auf dem Graphen mit Koordinaten (x, y).



Die Steigung m erfüllt nun $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$. Umstellen nach y liefert wieder die obige Punkt-Steigungs-Form.

3.2.3. *Achsenabschnittsform.* Sei a der x-Achsenabschnitt und b der y-Achsenabschnitt einer Geraden. Das heisst dass die Gerade die Abszisse an der Stelle $x = a$ und die Ordinate an der Stelle $y = b$ schneidet.



Betrachtet man nun das Steigungsdreieck gebildet aus den beiden Achsenabschnittspunkten, so ergibt sich für die Steigung $m = -b/a$ und die Gleichung der Geraden lautet

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Division durch b liefert die *Achsenabschnittsform*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Bemerkung: Diese Form macht keinen Sinn für $a = 0$ oder $b = 0$.

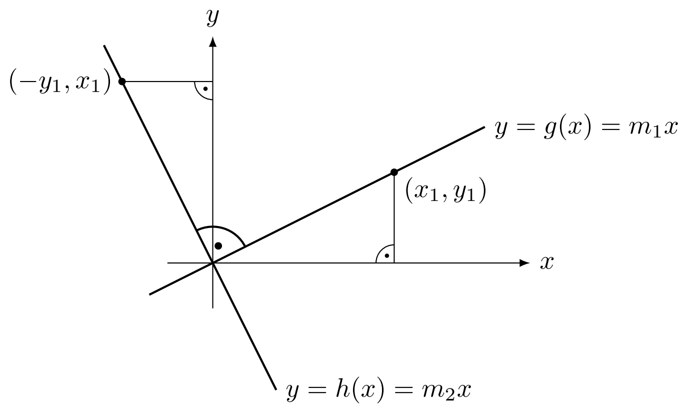
3.2.4. *Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden.* Wir illustrieren an einem Beispiel. Seien zwei Geraden durch die Funktionsgleichungen: $y = 2x - 6$ und $y = 4x + 2$ gegeben. Gesucht ist der *Schnittpunkt* dieser beiden Geraden. Es müssen beide Geradengleichungen erfüllt sein und somit erfüllen die Koordinaten eines Schnittpunktes das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y &= 2x - 6, \\ y &= 4x + 2. \end{aligned}$$

Gleichsetzen eliminiert y und liefert $x = -4$. Setzt man $x = -4$ in eine der beiden Gleichungen ein so ergibt sich $y = -14$. Der Schnittpunkt ist also durch das Koordinatenpaar $(-4, -14)$ gegeben.

Sei α der Winkel den eine Gerade mit der Horizontalen bildet. Diesen Winkel nennt man *Steigungswinkel.* Aus der geometrischen Betrachtung des Steigungsdreieckes folgt $m = \tan(\alpha)$. Bei der Berechnung des Winkels aus der Steigung ist Vorsicht geboten und am besten betrachtet man nur Dreiecke mit Winkel kleiner als $\pi/2$ und arbeitet mit Hilfswinkeln. Schnittwinkel zweier Geraden können dann durch entsprechende Addition bzw. Subtraktion der beiden Steigungswinkel gefunden werden.

Wir betrachten zwei Geraden die sich im Koordinatenursprung schneiden und senkrecht aufeinander stehen. Die Geraden seien durch $g(x) = m_1 x$ und $h(x) = m_2 x$ gegeben. Nun betrachten wir einen Punkt auf der Geraden g mit Koordinaten (x_1, y_1) und das zugehörige Steigungsdreieck der Geraden g. Wir drehen dieses Dreieck um $\pi/2$ um den Ursprung. Das gedrehte Dreieck ist ein Steigungsdreieck der Geraden h und die Koordinaten des gedrehten Punktes sind $(-y_1, x_1)$.



Nach Skizze gilt für die beiden Steigungen:

$$m_1 = \frac{y_1}{x_1}, \qquad m_2 = \frac{x_1}{-y_1}, \qquad \text{somit:} \qquad m_1 m_2 = -1.$$

Die Betrachtung ist unabhängig davon ob die Geraden sich am Ursprung schneiden oder nicht. Somit haben wir das folgende Resultat: Zwei Geraden stehen genau dann senkrecht aufeinander falls für ihre beiden Steigungen, gegeben durch m_1 und m_2, gilt: $m_1 m_2 = -1$.

3.3. **Quadratische Funktionen.** (Polynomfunktionen 2. Ordnung) *Quadratische Funktionen* sind Funktionen des Typs

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

Anwendungsbeispiele:

(i) Kinetische Energie eines Körpers in Abhängigkeit seiner Geschwindigkeit: $E(t) = \frac{1}{2}mv^2$, wobei wir mit E die Energie und mit m die Masse des Körpers bezeichnen.
(ii) Der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit der Zeit t bei Bewegung mit konstanter Beschleunigung a: $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$, wobei wir mit s_0 den Zurückgelegten Weg und mit v_0 die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ bezeichnen. Wir notieren dass sich bei dieser Bewegung der zurückgelegte Weg quadratisch, die Geschwindigkeit linear und die Beschleunigung konstant (in Abhängigkeit der Zeit) verhalten.

3.3.1. *Nullstellen/Quadratische Gleichungen.* Wir schreiben die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Das Aufsuchen der *Nullstellen* der Funktion ist äquivalent zur Bestimmung der Lösungsmenge der *quadratischen Gleichung* $ax^2 + bx + c = 0$. Die *Lösungsformel* wird durch quadratisches ergänzen wie folgt hergeleitet. Wir bringen den letzten Term der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ auf die rechte Seite, dividieren durch a und erhalten

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Nun addieren wir $(b/2a)^2$ auf beiden Seiten um links ein vollständiges Quadrat zu erhalten (dieser Schritt wird auch als *Quadratisch Ergänzen* bezeichnet):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

i.e.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ziehen der Wurzel ergibt

$$x_\pm + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Somit

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dies ist die Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

(i) $b^2 - 4ac > 0$. In diesem Fall gibt es zwei unterschiedliche reelle Lösungen ($x_\pm \in \mathbb{R}$, $x_+ \neq x_-$).
(ii) $b^2 - 4ac = 0$. In diesem Fall gibt es eine (doppelte) reelle Lösung ($x_+ = x_- \in \mathbb{R}$).
(iii) $b^2 - 4ac < 0$. In diesem Fall gibt es zwei unterschiedliche komplexe Lösungen mit nicht-verschwindendem Imaginärteil. Die Lösungen sind konjugiert komplex ($x_\pm \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $x_+ = \overline{x}_-$).

Man nennt $b^2 - 4ac$ die *Diskriminante.*

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $x^2 - 6sx + 4 = 0$ als Gleichung für x und mit s als Parameter. Der Ausdruck $b^2 - 4ac$ ist gegeben durch $36s^2 - 16$. In Abhängigkeit des Parammeters s hat nun die Gleichung zwei unterschiedliche, eine oder keine reelle Lösung. Die Bedingung für eine reelle Lösung ist $36s^2 - 16 = 0$ was $s = \pm\frac{2}{3}$ ergibt. Für zwei unterschiedliche reelle Lösungen ist die Bedingung $36s^2 - 16 > 0$ was $s > \frac{2}{3}$ oder $s < -\frac{2}{3}$ ergibt. Es bleibt der Fall keiner reellen Lösung wenn $s \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3.3.2. *Linearfaktoren.* Es gilt der folgende Satz: Sind x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, dann gilt

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Die beiden Faktoren $(x - x_1)$ und $(x - x_2)$ nennt man *Linearfaktoren.* Im Fall wo nur eine Lösung x_0 vorliegt wird diese doppelt verwendet: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = 2x^2 - 16x + 30$. Die Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung $2x^2 - 16x + 30 = 0$ und sind durch die Lösungsformel gegeben als: $x_+ = 5$, $x_- = 3$. Somit ist die Darstellung von $f(x)$ mit Linearfaktoren gegeben durch $f(x) = 2(x - 5)(x - 3)$. Wenn wir die Funktion $g(x) = 2x^2 + 6x + 7$ betrachten dann ergeben sich die Nullstellen zu $x_\pm = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}j$ und die Darstellung von $g(x)$ mit Linearfaktoren ist $g(x) = 2\Big(x - (-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}j)\Big)\Big(x - -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}j\Big)$. Bei der Funktion $h(x) = 3x^2 - 12x + 12$ findet man die Nullstelle $x_0 = 2$. Die Darstellung von $h(x)$ mit Linearfaktoren ist $h(x) = 3(x - 2)^2$.

3.3.3. *Satz von Vieta.* Wir haben den Satz: Seien x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$, dann gelten die Gleichungen von *Vieta*:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1 x_2 &= q. \end{aligned}$$

Der Beweis ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \end{aligned}$$

und Vergleich der Koeffizienten. Wir können mit diesem Satz Gleichungen zu gegebenen Lösungen konstruieren. Seien beispielsweise die Lösungen einer quadratischen Gleichung gegeben als $x_1 = 3$, $x_2 = 7$. Dann folgt $p = -(x_1 + x_2) = -10$ und $q = x_1 x_2 = 21$ und somit ist $x^2 - 10x + 21 = 0$ eine Gleichung die die geforderten Lösungen besitzt. Als zweite Variante kann man direkt die Darstellung mit Linearfaktoren ansetzen: $(x - 3)(x - 7) = x^2 - 10x + 21$.

Bemerkung: Jedes Vielfache einer quadratischen Gleichung besitzt die selben Lösungen wie die ursprüngliche Gleichung. Zum Beispiel besitzen die beiden Gleichungen $9x^2 - 90x + 189 = 0$ und $x^2 - 10x + 21 = 0$ die selben Lösungen. Insbesondere: Die beiden Formen $ax^2 + bx + c$ und $x^2 + px + q$ sind äquivalent (wir nehmen an $a \neq 0$). Die beiden Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ und $x^2 + px + q = 0$ besitzen die selben Lösungen (und führen somit zu den selben Nullstellen wenn als Funktionsgleichung verwendet).

3.3.4. *Biquadratische Gleichungen. Biquadratische Gleichungen* sind Gleichungen des Typs:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Substitution von $u = x^2$ führt auf die Gleichung $au^2 + bu + c = 0$. Diese Gleichung wird nun mit der Lösungsformel gelöst, man erhält die zwei Lösungen $u_\pm$. Lösen der Gleichung $u = x^2$ nach x ergibt $x = \pm\sqrt{u}$. Somit ergeben sich die vier Lösungen $x_1 = \sqrt{u_+}$, $x_2 = -\sqrt{u_+}$, $x_3 = \sqrt{u_-}$, $x_4 = -\sqrt{u_-}$.

Beispiel: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Substitution von $u = x^2$ liefert $u^2 - 7u + 12 = 0$. Über die Lösungsformel finden wir $u_+ = 4$, $u_- = 3$. Somit finden wir $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{3}$.

3.3.5. *Graph einer quadratischen Funktion, verschiedene Formen der Funktionsgleichung.* Die *Haupt-/Normalform* einer quadratischen Funktion ist

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $a = 1$, $b = c = 0$. Der Graph von $y = x^2$ ist die Normalparabel, welche nach oben geöffnet ist und bezüglich der y-Achse spiegelsymmetrisch ist ($f(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion). Somit sind die Graphen der Form $y = ax^2$ für $a > 0$ nach oben geöffnete und für $a < 0$ nach unten geöffnete Normalparabeln welche um den Faktor $|a|$ in Richtung der y-Achse gestreckt ($|a| > 1$) oder gestaucht ($|a| < 1$) sind. Der Scheitelpunkt S ist der höchste Punkt bei einer nach unten geöffneten Parabel und der tiefste Punkt bei einer nach oben geöffneten Parabel. Für die Parabeln der Form $y = ax^2$ ist der Scheitelpunkt der Koordinatenursprung $(x, y) = (0, 0)$.

Durch quadratisches Ergänzen kann die Normalform wie folgt umgeformt werden:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

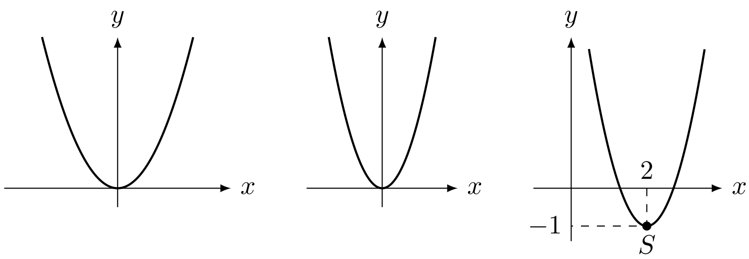
Mit

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c$$

ist dies

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2.$$

Es handelt sich um eine in y-Richtung gestreckte oder gestauchte Normalparabel, welche in x-Richtung um x_0 nach rechts und in y-Richtung um y_0 nach oben verschoben ist. Der Scheitelpunkt liegt somit bei (x_0, y_0). Man nennt diese Form die *Scheitelpunktsform* einer Parabel. Der Graph ist spiegelsymmetrisch bezüglich der Geraden $x = x_0$.



$y = x^2$ $\qquad$ $y = 2x^2$ $\qquad$ $y + 1 = 2(x - 2)^2$

Die *Produktform* einer Parabel ist gegeben durch die Linearfaktoren:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

wobei x_1, x_2 die Nullstellen sind.

3.3.6. *Aufsuchen der Funktionsgleichung aus gegebenen Punkten des Graphen.* Die Funktionsgleichung einer Parabel ist durch Angabe von genügend Punkten des Graphen eindeutig bestimmt. Wir illustrieren an drei Beispielen:

(i) Gegeben seien die Koordinaten von drei Punkten auf der Parabel: $(1, 0)$, $(5, 0)$, $(0, 3)$. Man findet die Funktionsgleichung wie folgt. Die ersten beiden Punkte sind die Schnittpunkte des Graphen mit der Abszisse und somit sind das die Nullstellen. Es folgt dass die Funktionsgleichung die folgende Form aufweist (Produktform): $y = a(x - 1)(x - 5)$. Einsetzen des dritten Punktes (setzen von $(x, y) = (0, 3)$) und auflösen nach a ergibt $a = \frac{3}{5}$, i.e. $y = \frac{3}{5}(x - 1)(x - 5)$.

(ii) Gegeben seien die Koordinaten von zwei Punkten auf der Parabel: $(2,3)$, $(3,4)$ und der zweite Punkt sei der Scheitelpunkt. Man findet in diesem Fall die Funktionsgleichung wie folgt. Da der zweite Punkt dem Scheitelpunkt entspricht macht man den folgenden Ansatz für die Funktionsgleichung (Scheitelpunktsform): $y = a(x-3)^2 + 4$. Einsetzen des ersten Punktes und nach a lösen ergibt $a = -1$, i.e. die Funktionsgleichung lautet: $y = -(x-3)^2 + 4$.

(iii) Gegeben seien die Koordinaten von drei Punkten auf der Parabel: $(0,1)$, $(3,-2)$, $(6,2)$. Man findet die Funktionsgleichung in diesem Fall wie folgt. Bei diesen drei Punkten sind keine Nullstellen dabei und es ist auch nicht klar ob einer der Punkte dem Scheitelpunkt entspricht. In dieser Situation macht man den allgemeinen Ansatz (Normalform) $y = ax^2 + bx + c$ und setzt die drei Punkte ein. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 &= 36a + 6b + c, \\ 1 &= c, \\ -2 &= 9a + 3b + c. \end{aligned}$$

Auflösen ergibt $a = \frac{7}{18}$, $b = -\frac{13}{6}$, $c = 1$, i.e. die Funktionsgleichung lautet: $y = \frac{7}{18}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$.

3.4. **Polynomfunktionen mit beliebigem Grad $\geq$ 3.** Wie bereits besprochen sind dies Funktionen des Typs

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Die Graphen können ohne lange Rechnung skizziert werden für $|x| \ll 1$ und für $|x| \gg 1$ mit Hilfe der folgenden Approximationen.

3.4.1. *Approximationen für kleine x.* Für $|x| \ll 1$ kann man die Eigenschaft $|x|^2 \ll |x|$ verwenden[2] und erhält die Approximation

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &\approx a_1 x + a_0. \end{aligned}$$

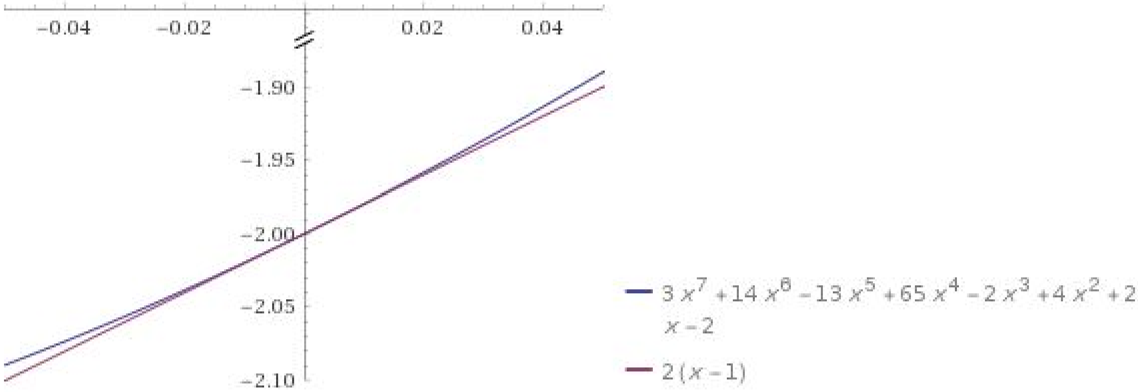
Somit kann der Graph von $y = f(x)$ approximiert werden durch die Gerade $y = a_1 x + a_0$ für $|x| \ll 1$. Man spricht von einer *linearen Approximation.* Berücksichtigt man noch einen weiteren Term, so erhält man

$$f(x) \approx a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{für} \quad |x| \ll 1$$

und man spricht von einer *quadratischen Approximation.* Diese beiden Approximationen sind nur gut für Werte von x genügend nahe bei Null. Die Differentialrechnung (siehe später) wird es uns erlauben solche Approximationen für beliebige Werte von x zu finden. Als Beispiel zeichnen wir den Graphen der Funktionen $f(x) = 3x^7 + 14x^6 - 13x^5 + 65x^4 -$

[2] Man prüfe diese Eigenschaft durch das Einsetzen von kleinen Zahlen. Zum Beispiel $x = 0.0000001$ ergibt $x^2 = 0,0000000000001$.

$2x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 2x - 2$ für $x \in (-0.05, 0.05)$.



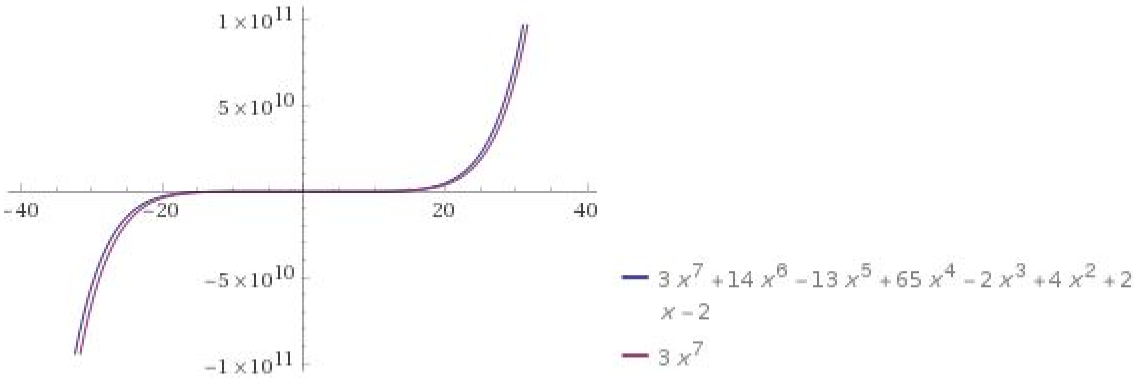
3.4.2. *Approximationen für grosse* $|x|$. Für $|x| \gg 1$ kann man die Eigenschaft $|x^n| \gg |x^{n-1}|$ verwenden[3] und erhält die Approximation

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &\approx a_n x^n \end{aligned}$$

oder auch

$$\frac{f(x)}{x^n} \approx a_n \quad \text{für} \quad |x| \gg 1.$$

Somit ist die qualitative Form des Graphen gegeben durch $y = a_n x^n$ für $|x| \gg 1$. Als Beispiel zeichnen wir den Graphen der Funktionen $f(x) = 3x^7 + 14x^6 - 13x^5 + 65x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 3x^7$ für $x \in (-40, 40)$.



3.4.3. *Polynomdivision.* Man kann Polynome durch Linearfaktoren dividieren. Ein Verfahren dazu ist die *Polynomdivision.* Dieses Verfahren entspricht einer Modifikation des Verfahrens zur Division ganzer Zahlen. Wir illustrieren durch ein Beispiel. Sei das Polynom durch $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x + 2$ gegeben. Wir dividieren durch den Linearfaktor $(x - 3)$.

$$\begin{aligned} &(x^3 + 2x^2 - 6x + 2) : (x - 3) = x^2 + 5x + 9 + \frac{29}{x-3} \\ &-\underline{(x^3 - 3x^2)} \\ &\qquad\quad 5x^2 - 6x + 2 \\ &\qquad -\underline{(5x^2 - 15x)} \end{aligned}$$

[3]Man prüfe diese Eigenschaft durch das Einsetzen von grossen Zahlen. Zum Beispiel $(n = 2)$ $x = 1000000$ ergibt $x^2 = 1000000000000$.

$$
\begin{array}{r}
9x+2 \\
-\ \underline{(9x-27)} \\
29 = r
\end{array}
$$

Man startet indem man den Term höchster Ordnung des Polynoms durch den Term höchster Ordnung des Linearfaktors[4] dividiert und das Ergebnis auf der rechten Seite notiert. In obigem Beispiel also $x^3/x = x^2$. Dann multipliziert man den erhaltenen Quotienten (also x^2) mit dem Linearfaktor und zieht den dadurch erhaltenen Ausdruck (also $x^2(x-3) = x^3 - 3x^2$) vom Polynom ab. Dieser Prozess wird nun sukzessive widerholt, bis ein Rest r übrigbleibt, dessen Potenz niedriger ist als die des Linearfaktors (also niedriger als x).

Umgeschrieben erhalten wir also

$$\frac{x^3+2x^2-6x+2}{x-3} = x^2+5x+9+\frac{29}{x-3},$$

oder

$$x^3+2x^2-6x+2 = (x^2+5x+9)(x-3)+29.$$

Durch Einsetzen von $x = 3$ in diese Gleichung sehen wir, dass es möglich ist den Rest zu berechnen ohne die Polynomdivision durchzuführen. Wir formulieren diese Beobachtung allgemein.

3.4.4. *Abspalten eines Linearfaktors.* Sei $f(x)$ ein Polynom. Dann gilt für ein beliebiges x_1:

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = f_1(x) + \frac{r}{x-x_1},$$

wobei $f_1(x)$ ein Polynom ist. Umgeschrieben:

$$f(x) = f_1(x)(x-x_1) + r.$$

Setzen wir nun $x = x_1$ in diese Gleichung ein, so erhalten wir

$$f(x_1) = f_1(x_1)\underbrace{(x_1-x_1)}_{=0}+r,$$

i.e.

$$r = f(x_1).$$

Ist nun $f(x_1) = 0$, dann folgt $r = 0$ und umgekehrt. Mit anderen Worten, x_1 ist genau dann eine Nullstelle von $f(x)$ falls der Linearfaktor $(x - x_1)$ ein Teiler von $f(x)$ ist. Dieses Resultat ist der Satz zur *Abspaltung von Linearfaktoren.*

Hat nun das Polynom $f_1(x)$ eine Nullstelle bei $x = x_2$, so lässt sich der Linearfaktor $(x-x_2)$ von $f_1(x)$ abspalten, i.e. man kann schreiben $f_1(x) = f_2(x)(x-x_2)$, wobei $f_2(x)$ ein weiteres Polynom ist. Schreibt man nun im Ausdruck für $f(x)$ das Polynom $f_1(x)$ in dieser Weise, so erhält man

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x)(x-x_1) \\
&= f_2(x)(x-x_2)(x-x_1).
\end{aligned}
$$

Von diesem Ausdruck sehen wir dass x_2 auch eine Nullstelle von $f(x)$ ist. Diesen Prozess kann man nun für weitere Nullstellen sukzessive ausführen.

[4] In der vorliegenden Betrachtung ist dieser immer gleich x, die Polynomdivision kann aber auch bei einer Division durch einen Ausdruck mit höherer Ordnung (zum Beispiel quadratisch) angewandt werden.

Eine Antwort auf die Frage nach der Anzahl Nullstellen liefert der *Fundamentalsatz der Algebra*: Die algebraische Gleichung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

hat im komplexen genau n Lösungen[5]:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

und es gilt die *Linearfaktorzerlegung*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die Nullstellen von $f(x)$.

Bemerkungen:

(i) Nullstellen können mehrfach auftreten. Beispiel: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$. Im Fall $n = 2$ entspricht dies der Situation wo $b^2 - 4ac = 0$ in $ax^2 + bx + c = 0$.

(ii) Nullstellen $\in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ treten immer paarweise konjugiert komplex auf. Beispiel: $x^2 + 1 = (x - j)(x + j)$. Im Fall $n = 2$ ist dies aus der Lösungsformel: $x_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ ersichtlich, falls $b^2 - 4ac < 0$. Dann ist $x_\pm = -b/(2a) \pm j\sqrt{4ac - b^2}/(2a)$.

(iii) Es existieren 'nur' Formeln für die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$. Für die Berechnung der Nullstellen von Polynomen höherer Ordnung müssen numerische Verfahren herangezogen werden.

4. Gebrochenrationale Funktionen

Die *gebrochenrationalen Funktionen* sind Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Typs

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Sie sind somit ein Quotient zweier ganzrationalen Funktionen und wir schreiben oft

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)},$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \\ h(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

Im Fall $m < n$ nennt man die Funktion *echt gebrochen rational* und im Fall $m \geq n$ nennt man die Funktion *unecht gebrochen rational*. Beispiele sind (i) $f(x) = \frac{1}{x}$, (ii) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x + 1}$ und (iii) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Hierbei sind die ersten beiden echt und das dritte Beispiel unecht gebrochen.

Bei unecht gebrochenen rationalen Funktionen führt die Polynomdivision auf eine Zerlegung in eine Summe aus einer ganzrationalen und einer echt gebrochen rationalen Funktion. Beispiel:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

[5] Dies ist in Analogie zum Resultat dass im komplexen die Anzahl n-te Wurzeln genau n ist.

4.1. **Nullstellen.** Wir betrachten das Beispiel

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

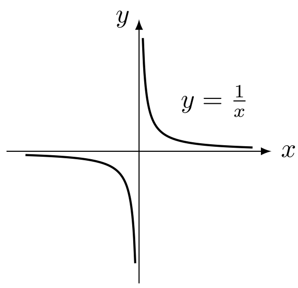
Die *Nullstellen* sind gegeben durch die Gleichung $f(x) = 0$. Der Zähler ist für alle x ungleich Null und somit vereinfacht sich $f(x) = 0$ zu $x^2 - 1 = 0$, i.e. wir haben die zwei Nullstellen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Allgemein gilt: x_0 ist eine *Nullstelle* der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ genau dann, wenn $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$.

4.2. **Definitionslücken.** Wir betrachten das Beispiel $f(x) = \frac{1}{x}$. Division durch Null ist nicht erlaubt, somit ist die Funktion an der Stelle $x = 0$ nicht definiert. Allgemein sind die *Definitionslücken* die Nullstellen des Nenners. Ist n die Ordnung des Nenners so gibt es also höchstens n Nullstellen des Nenners (nach dem Fundamentalsatz der Algebra), somit also höchstens n Definitionslücken.

Falls der Zähler und Nenner gemeinsame Nullstellen besitzen, so zerlegt man den Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzt die gemeinsamen Faktoren. Solche Definitionslücken nennt man *hebbare Definitionslücken*. Die erhaltene Funktion nach dem Kürzen hat nun einen erweiterten Definitionsbereich.

4.3. **Polstellen.** Wir betrachten den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$.

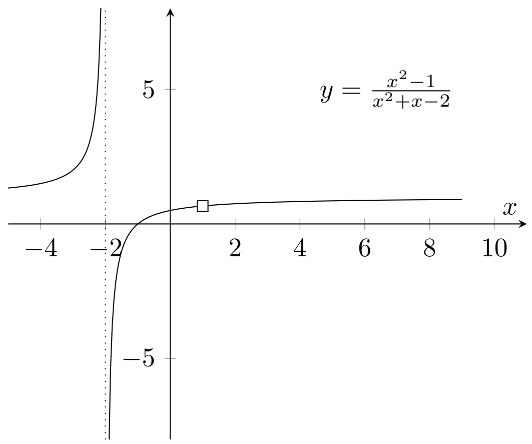


Nun betrachten wir Argumente (x-Werte) in der Nähe von $x = 0$ und studieren die dazugehörigen Funktionswerte $f(x)$. Wir sehen dass für negative x-Werte bei einer Annäherung an $x = 0$ die Funktionswerte $f(x)$ kleiner werden als jede noch so kleine Zahl. Für positive x-Werte bei einer Annäherung an $x = 0$, wachsen die Funktionswerte $f(x)$ über jede Grenze hinaus.

x-Werte, in deren Umgebung die Funktionswerte $f(x)$ über alle Grenzen hinaus fallen oder wachsen heissen *Polstellen*. Im Allgemeinen ist die Menge der Polstellen nicht gleich der Menge der Definitionslücken. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

Die Definitionslücken ergeben sich aus den Nullstellen des Nenners zu $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Die Nullstellen des Zählers sind $x = \pm 1$. Die Stelle $x = 1$ ist aber auch eine Nullstelle des Nenners, somit ist $x = 1$ keine Nullstelle der Funktion $f(x)$, da sie nicht im Definitionsbereich liegt. $x = 1$ ist aber auch keine Polstelle, da der Zähler und der Nenner in der Nähe von $x = 1$ beliebig klein werden und der Bruch somit nicht über alle Grenzen hinaus wächst oder fällt (wir werden diese Zusammenhänge bei der Betrachtung von Grenzwerten näher erläutern). Als Nullstelle bleibt also nur $x = -1$. Nach dem kürzen des Linearfaktors ist die gekürzte Funktion $\frac{x+1}{x+2}$ und man sieht dass in der Nähe von $x = -2$ die Funktionswerte beliebig stark wachsen beziehungsweise fallen, $x = -2$ ist somit eine Polstelle. In der folgenden Figur ist der Graph $y = f(x)$ gezeichnet. Die Definitionslücke bei $x = 1$ notieren wir mit einem Quadrat.



4.4. **Allgemeines Vorgehen.** Um die Definitionslücken, Nullstellen und Polstellen einer gebrochenrationalen Funktion aufzusuchen gehen wir wie folgt vor:

(i) Man bestimmt die Nullstellen des Nenners, diese sind die Definitionslücken der Funktion.
(ii) Dann zerlegt man Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzt.
(iii) Die Nullstellen des Zählers der gekürzten Funktion ergeben die Nullstellen der Funktion (Bei den erhaltenen Nullstellen ist zu prüfen ob diese im Definitionsbereich liegen).
(iv) Die Nullstellen des Nenners der gekürzten Funktion ergeben die Polstellen der Funktion.

4.5. **Asymptoten.** Es sind die Fälle zu unterscheiden in denen eine echt gebrochenrationale Funktion oder eine unecht gebrochenrationale Funktion vorliegt.

Im ersten Fall ist der Zähler von niedrigerer Ordnung als der Nenner und somit ist sein Wachstum für $|x| \to \infty$ weniger schnell als das Wachstum des Nenners. Daraus folgt dass sich eine echt gebrochenrationale Funktion für grosse und kleine x-Werte der x-Achse annähert. In anderen Worten: Falls $f(x) = g(x)/h(x)$ mit $g(x)$ und $h(x)$ Polynomen und sei $g(x)$ von niedrigerer Ordnung als $h(x)$, dann folgt dass $f(x) \to 0$ wenn $|x| \to \infty$.

Im Fall wo eine unecht gebrochenrationale Funktion vorliegt, kann eine Polynomdivision zurchgeführt werden. Man erhält eine Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion (falls der Rest nicht Null ist). Analog zum ersten Fall nähert sich der echt gebrochenrationale Anteil für grosse und kleine x-Werte der x-Achse an. Somit ist der ganzrationale Anteil die Asymptote.

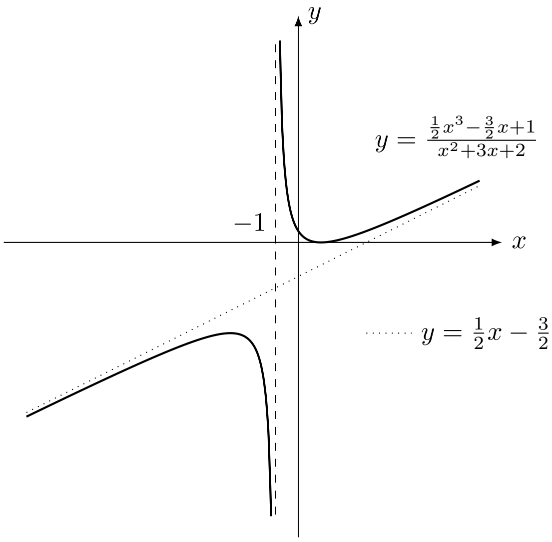
Wir illustrieren an einem Beispiel. Sei

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

Polynomdivision ergibt

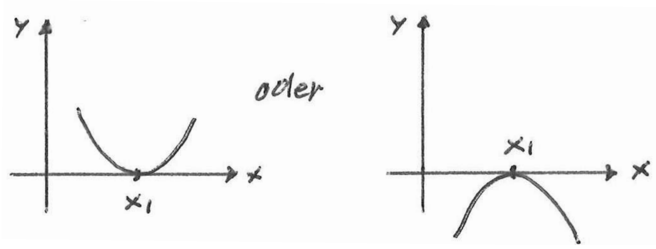
$$\frac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{2x + 4}{x^2 + 3x + 2}.$$

Somit sind die Asymptoten von $f(x)$ für grosse und kleine x-Werte gegeben durch die Funktion $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Der Graph der Funktion ist (wobei gepunktet die Polstelle und gestrichelt die Asymptote):

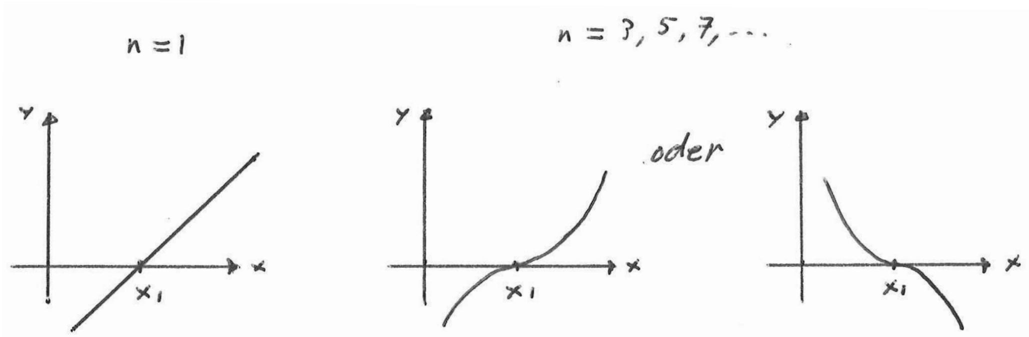


4.5.1. *Qualitatives Verhalten des Graphen in der Nähe von Nullstellen und Polen.* Man betrachtet den Zähler des gekürzten Bruchs (die Betrachtung einer ganzrationalen Funktion ist identisch). Wir unterscheiden:

(i) Vielfachheit der Nullstelle ist gerade, i.e. im Zähler des gekürzten Bruchs steht der Linearfaktor in der Form $\cdots (x - x_1)^n \cdots$ mit n gerade. Dann findet man eine der beiden folgenden Situationen, abhängig vom Vorzeichen der Funktion in der Nähe der Nullstelle:

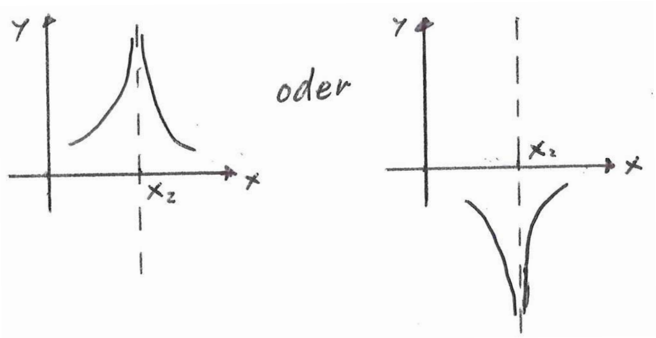


(ii) Vielfachheit der Nullstelle ist ungerade:

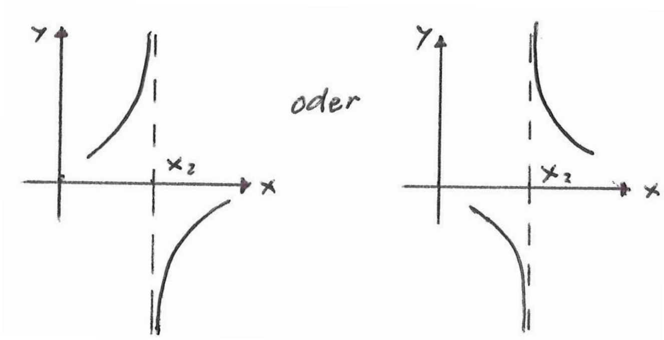


Um das qualitative Verhalten in der Nähe von Polstellen zu betrachten, untersucht man die Vielfachheit der Nullstellen des Nenners des gekürzten Bruchs. Wir unterscheiden:

(i) Die Vielfachheit der Nullstelle ist gerade, i.e. im Nenner des gekürzten Bruchs steht der Linearfaktor in der Form $\ldots (x - x_2)^m \cdots$ mit m gerade. Dann findet man eine der folgenden Situationen, abhängig vom Vorzeichen der Funktion in der Nähe dieser Stelle:



(ii) Vielfachheit der Nullstelle ist ungerade:



5. Aufgaben

Aufgabe 1

Man bestimme alle Teilmengen von (i) $\{0,1\}$ und (ii) $\{a,b,c,d\}$.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $(A \cap B) \subset A$
(ii) $A \subset (A \cup B)$
(iii) $(A \cup B) \subset [(A \cup B)\backslash A]$
(iv) $(A\backslash B) \cap B = \{\}$

Aufgabe 3

Man schraffiere in einem Mengendiagramm

(i) $A\backslash(B\backslash C)$
(ii) $(A\backslash B)\backslash C$
(iii) $A\backslash(B \cup C)$

Aufgabe 4

Was lässt sich über die Mengen A, B und C aussagen, wenn folgendes gilt

(i) $(A\backslash B) \subset (A \cap B)$
(ii) $A \cap B = A \cup B$
(iii) $(A\backslash C) \cup (C\backslash B) = \{\}$

Aufgabe 5

Man vereinfache

(i) $(A \cap B) \cap (A\backslash B)$
(ii) $(A \cap B) \cup (A\backslash B)$
(iii) $A\backslash(A\backslash B)$

Aufgabe 6

Von den Studenten einer Klasse (K) spielen 14 Fussball (F), 12 Handball (H), 8 Basketball (B), 4 Fussball und Handball, 8 Handball und Basketball, 2 Fussball und Handball und Basketball, 7 weder Fussball noch Handball noch Basketball. Wieviele Studenten zählt die Klasse?

Aufgabe 7

Man berechne $|2-a| - |b+1| + |a+b|$ mit den Werten

(i) $a = 3$, $b = 5$
(ii) $a = 2$, $b = -4$

Aufgabe 8

Man überprüfe ob der Wert des Ausdrucks $(3-a)(b+ac)$ unter den Bedingungen $|a| \leq 2$, $|b| \leq 5$ und $|c| \leq 4$ den Wert 80 überschreitet.

Aufgabe 9

Für welche reellen Zahlen gilt

(i) $|x| = -x$
(ii) $|x| = x$
(iii) $x = -x$
(iv) $|x| = |-x|$
(v) $|x|^2 = x^2$
(vi) $|x| < 3$

Aufgabe 10

Man bestimme die folgenden Mengen (als Intervall/Ausdruck von Intervallen)

(i) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3) < 0\}$
(ii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)x < 0\}$
(iii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)(x-5) \geq 0\}$

Aufgabe 11

Man löse die folgenden Gleichungen

(i) $|y| = 3$
(ii) $|2t+5| = 4$
(iii) $|8-3s| = 9/2$

Aufgabe 12

Man löse die folgenden Ungleichungen

(i) $|2s| \geq 4$
(ii) $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$
(iii) $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$

Aufgabe 13

Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems gegeben durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} |x+3| &\leq 2, \\ x^2 &\geq 16. \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Bestimmen sie den grösstmöglichen Definitionsbereich und das zugehörige Bild von

(i) $f(x) = 1 + x^2$
(ii) $g(x) = \sqrt{5x+10}$
(iii) $h(t) = \dfrac{4}{3-t}$
(iv) $f(x) = 5 - 2x$
(v) $g(x) = \sqrt{|x|}$
(vi) $h(t) = t/|t|$

Aufgabe 15

Man bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen.

(i) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$
(ii) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
(iii) $f(x) = (x-1)e^x$

Aufgabe 16

Man bestimme für die folgenden Funktionen das Symmetrieverhalten.

(i) $f(x) = 4x^2 - 16$
(ii) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
(iii) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
(iv) $f(x) = |x^2 - 4|$
(v) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$
(vi) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$
(vii) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
(viii) $f(x) = 4\sin^2(x)$

Aufgabe 17

Sei f eine gerade Funktion und sei g eine ungerade Funktion. Man zeige dass fg eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 18

Man finde alle Funktionen welche gerade und ungerade sind.

Aufgabe 19

(i) Seien
$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Man zeige dass $f_1(x)$ eine ungerade und $f_2(x)$ eine gerade Funktion ist.

(ii) Sei $f(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Seien
$$g_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad g_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$
Man zeige dass $g_1(x)$ eine ungerade und $g_2(x)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 20

Man bestimme die Periode p der folgenden Funktionen

(i) $f(x) = \sin(2x)$
(ii) $f(x) = \sin(x/2)$
(iii) $i(t) = I\sin(\omega t + \phi_0)$, wobei I, $\omega, \phi_0 \in \mathbb{R}$ konstanten sind.

Aufgabe 21

Seien die drei Funktionen f, g und h definiert durch
$$f(x) = x^2 - 1, \qquad g(x) = \frac{x}{x^2+1}, \qquad h(x) = x^3.$$
Man bestimme die folgenden Ausdrücke

(i) $a(x) = (f \cdot g)(x) + h(x)$
(ii) $b(x) = (f \circ g)(x) + h(x)$
(iii) $c(x) = (g \circ f)(x)$
(iv) $d(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$
(v) $e(x) = (h \circ (f \cdot f))(x)$

Aufgabe 22

Sei

$$f(x) = x^3 + x + 1, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1}.$$

Man finde

(i) den Definitionsbereich von $f \cdot g$,
(ii) den Definitionsbereich von $g \circ f$,
(iii) den Wert $f^{-1}(11)$.

Aufgabe 23

Man ergänze die folgende Tabelle:

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x-7$	$\sqrt{x}$	?
$x+2$	$3x$	?
?	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	?
?	$1+\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	?	x

Aufgabe 24

Man bestimme die untenstehenden Ausdrücke unter Verwendung von

$$f(x) = 2 - x, \qquad g(x) = \begin{cases} -x & -2 \le x < 0 \\ x-1 & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

(i) $f(g(0))$
(ii) $f(f(2))$
(iii) $g(f(3))$
(iv) $g(f(0))$
(v) $g(g(-1))$
(vi) $f(g(1/2))$

Aufgabe 25

(i) Man bestimme für die folgenden Funktionen das Symmetrieverhalten (i.e. sind die Funktionen gerade, ungerade, weder noch):

$$f(x) = 3x^2 + |x| + 1, \qquad g(x) = (x^2+4)(x-2)(x+2).$$

(ii) Der Graph der linearen Funktion $h(x)$ verläuft durch die Punkte mit Koordinaten $(4,0)$ und $(0,2)$. Man finde die Konstante k, so dass die Funktion $h(x) + k$ eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 26

Sei g eine gerade Funktion und sei h eine ungerade Funktion. Man zeige dass die Komposition $g \circ h$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 27

(i) Sei $f(x)$ eine periodische Funktion mit Periode $p=4$. Man bestimme die Perioden der folgenden Funktionen:

$$g(x) = f(x)+3, \qquad h(x) = f(x+2), \qquad k(x) = 2f(x/2).$$

(ii) Sei $q(x)$ eine periodische Funktion mit Periode $p=3$ und der Eigenschaft

$$q(x) = \begin{cases} |x|+2 & -1 \leq x \leq 1, \\ 3 & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Man skizziere den Graphen $y = q(x)$ für $x \in [-3,6]$ und berechne $q(11/2)$.

Aufgabe 28

Man untersuche die folgenden Funktionen und entscheide ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Man bestimme auch $\mathrm{Im}(f)$.

(i) $f:[0,5] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$
(ii) $f:[0,\infty) \to [0,\infty), \qquad f(x) = x^2$
(iii) $f:[-2,5] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$
(iv) $f:[-2,5] \to [0,25], \qquad f(x) = x^2$
(v) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3$
(vi) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - x.$

Aufgabe 29

Man bestimme für die folgenden Funktionen an Hand des Graphen ob sie injektiv sind:

(i)

$$f(x) = \begin{cases} 3-x & x<0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii)

$$g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$$

Aufgabe 30

Man berechne die inverse Funktion der folgenden Funktionen und überprüfe dass $f^{-1}(f(x)) = x$ (Wir nehmen an dass der Definitionsbereich und der Bildbereich so gewählt sind dass die Funktionen bijektiv sind).

(i) $f(x) = 3 - 29x$
(ii) $f(x) = \sqrt{x-3}$
(iii) $f(x) = \dfrac{x+4}{2x-5}$
(iv) $f(x) = x^3 + 6$
(v) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

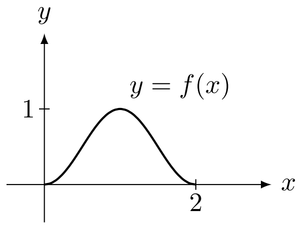
Aufgabe 31

Über eine Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weiss man dass sie ungerade ist und periodisch mit Periodenlänge 4. Für $0 \leq x \leq 2$ entspricht der Graph von f einer Standardparabel, welche so verschoben und gespiegelt ist, dass sie durch die Punkte $(1,1)$ und $(2,0)$ geht.

Man zeichne den Graphen für $-4 < x < 6$ und bestimme $f(-2.5)$.

Aufgabe 32

Die untenstehende Figur zeigt den Graphen einer Funktion $f(x)$ mit Definitionsbereich $[0,2]$ und Bild $[0,1]$.



Man finde den Definitionsbereich D und das Bild B der folgenden Funktionen und skizziere deren Graph.

(i) $f(x)+2$
(ii) $f(x)-1$
(iii) $2f(x)$
(iv) $-f(x)$
(v) $f(x+3)$
(vi) $f(x-1)$
(vii) $-f(-x)$
(viii) $-f(x+1)+1$
(ix) $\frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)-1$

Aufgabe 33

Man skizziere die folgenden Funktionen.

(i) $f(x)=\sqrt{x}+4$
(ii) $f(x)=x^3-2$
(iii) $f(x)=|x+2|$
(iv) $f(x)=(x-5)^2$
(v) $f(x)=\sqrt{x+4}-3$
(vi) $f(x)=|x+7|+2$
(vii) $f(x)=2x^2+8x-12$
(viii) $f(x)=4\sin(2x+\pi)+2$
(ix) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2$

Aufgabe 34

(i) Man bestimme den Grad und die Polynomkoeffizienten der Funktion
$$f : x \mapsto -2x(x-1)(x+3)^2.$$
(ii) Sei $f(x)=x^2+3x$ und $g(x)=2x+1$. Man bestimme den Grad von $(f+g)(x)$, $(fg)(x)$ und $f(g(x))$.
(iii) Sei $f(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad m und sei $g(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad n. Die Koeffizienten der höchsten Exponenten seien gleich. Man bestimme den Grad der ganzrationalen Funktionen $(f+g)(x)$, $(fg)(x)$ und $f(g(x))$.

Aufgabe 35

(i) Gegeben ist die Gerade g mit Funktionsgleichung $y=\frac{3}{5}x+1$ und der Punkt $P(-1,-4)$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden h, welche parallel zu g verläuft und durch den Punkt P geht?
(ii) Die Gerade i schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0=\frac{74}{15}$ und die Gerade g aus (i) an der Stelle $x_1=2$. Wie lautet die Funktionsgleichung der Geraden i?
(iii) Man berechne die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkt im Viereck $A(6,2)$, $B(1,7)$, $C(-3,-1)$, $D(4,-2)$.

Aufgabe 36

Seien zwei lineare Funktionen gegeben: $f(x) = mx + b$ und $g(x) = Mx + B$.

(i) Man zeige dass $(f + g)(x)$ wieder eine lineare Funktion ist und berechne deren Steigung und y-Achsenabschnitt.

(ii) Man zeige dass $(f \circ g)(x)$ wieder eine lineare Funktion ist und berechne deren Steigung und y-Achsenabschnitt.

(iii) Sei $b = 0$ und seien μ, ν zwei Konstanten. Man zeige $f(\mu x+\nu y) = \mu f(x)+\nu f(y)$.

Aufgabe 37

Eine Gerade gehe durch die beiden (unterschiedlichen) Punkte mit Koordinaten (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Man finde die Geradengleichung in der Form $y = mx + b$, i.e. man finde Ausdrücke für m und b in Abhängigkeit der Koordinaten der gegebenen Punkte.

Aufgabe 38

Für welche Werte von C hat die Gleichung $2x^2 - 5x + C = 0$ zwei reelle Lösungen.

Aufgabe 39

Man löse die folgenden Gleichungen:

(i) $x^2 + 2x = 7$

(ii) $3q^2 + 11 = 5q$

(iii) $7t^2 = 6 - 19t$

(iv) $\frac{3}{y-2} = \frac{1}{y} + 1$

(v) $16x - x^2 = 0$

Aufgabe 40

Man beweise den Satz zu den Linearfaktoren.

Aufgabe 41

Man finde eine quadratische Gleichung zu den Lösungen:

(i) -9, 1

(ii) $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$

(iii) $5 \pm 3j$

(iv) $-\frac{9}{7}$ (doppelt)

Aufgabe 42

Man finde die Nullstellen der folgenden Funktionen und schreibe die Funktionen als Produkt von Linearformen:

(i) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

(ii) $f(x) = x^4 + 4x^2 - 21$

(iii) $f(x) = 5x^4 - 30x^2 + 25$

Aufgabe 43

(i) Sei

$$f(x) = x^2 - 5x + 4, \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

Man bestimme die Lösungen der Gleichung

$$f(g(x)) = 0.$$

(ii) Für welche Werte von C hat die Gleichung

$$x^2 + Cx + C = 0$$

zwei reelle Lösungen?

Aufgabe 44

Man bringe die folgenden Funktionsgleichungen in die Scheitelform.

(i) $y = x^2 + 4x + 5$
(ii) $y = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 1$
(iii) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

Aufgabe 45

Sei die Funktionsgleichung $y = ax^2 + bx + c$ gegeben. Man leite die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit der Parameter a, b und c her.

Aufgabe 46

Man bestimme die Lösungsmenge von

(i) $2x^2 - 4x + 3 < 0$
(ii) $2x^2 - 4x + 3 > 0$
(iii) $x^2 - 2x - 3 < 0$

Aufgabe 47

Sei

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

(i) Man ergänze quadratisch um die Funktionsgleichung $y = f(x)$ in Scheitelform zu schreiben. Man bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
(ii) Man schreibe die Funktionsgleichung $y = f(x)$ in der Produktform, i.e. als Produkt von Linearfaktoren.
(iii) Man bestimme die Lösungsmenge von $f(x) \geq 0$.

Aufgabe 48

Man führe die Polynomdivision durch für $(2x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 4x - 8) : (x - 1)$.

Aufgabe 49

Man bestimme den Rest der Division $(x^3 - 3x^2 - 28x + 65) : (x - 2)$.

Aufgabe 50

Man schreibe $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 51

Sei $f(x) = x^3 - 3x^2 - 28x + 60$. Die Nullstellen von $f(x)$ seien $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -5$. Man schreibe $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 52

Sei $f(x) = 2x^3 - 22x^2 + 78x - 90$. f habe die Nullstellen $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$. Man schreibe $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 53

Sei $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$. f habe die Nullstellen $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Man schreibe $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

Aufgabe 54

Man zerlege die Funktion $f(x) = \dfrac{4x^4 - 2x + 5}{x^2 - 3x - 1}$ in eine Summe einer ganzrationalen und einer echt gebrochen rationalen Funktion.

Aufgabe 55

Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

mit

$$\begin{aligned} g(x) &= -x^3 - x^2 + 8x + 12, \qquad g(3) = 0, \\ h(x) &= x + 1. \end{aligned}$$

(i) Man bestimme die Definitionslücken, Nullstellen und Polstellen.
(ii) Man bestimme die Asymptote.
(iii) Man skizziere den Graph.

Aufgabe 56

Sei die Funktion $f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-7)(x+1)}$ gegeben. Man bestimme die Definitionslücken, die Nullstellen und die Polstellen von $f(x)$. Man zeichne den Graphen von $f(x)$.

Aufgabe 57

Sei $f(x) = g(x)/h(x)$ mit $g(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ und $h(x) = x - 1$. $g(x)$ besitzt eine Nullstelle bei $x = 2$. Man finde die Definitionslücken, Nullstellen, Pole, Asymptoten und man skizziere den Graphen der Funktion.

Aufgabe 58

Man finde Nullstellen, Pole, Asymptoten und den Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$.

Aufgabe 59

Man finde Definitionsbereich, Nullstellen, Pole, Asymptoten und den Graph der Funktion $f(x) = \frac{x^3-5x^2-2x+24}{x^3+3x^2+2x}$. Der Zähler hat die Nullstelle $x = -2$.

Aufgabe 60

Man bestimme Nullstellen, Pole und Asymptoten der Funktion $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-25)}{x^3+4x^2-5x}$.

Aufgabe 61

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & x < 0, \\ \frac{x^2-2}{x+1} & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(i) Man bestimme $(f(1))^2$ und $(f \circ f)(1)$.
(ii) Man skizziere den Graphen $y = f(x)$.
(iii) Ist $f(x)$ injektiv? Man begründe die Antwort mit dem Graphen.

Aufgabe 62

Ausgehend von den Graphen der Funktionen $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ und $y = \tan(x)$, zeichne man die Graphen der folgenden Funktionen.

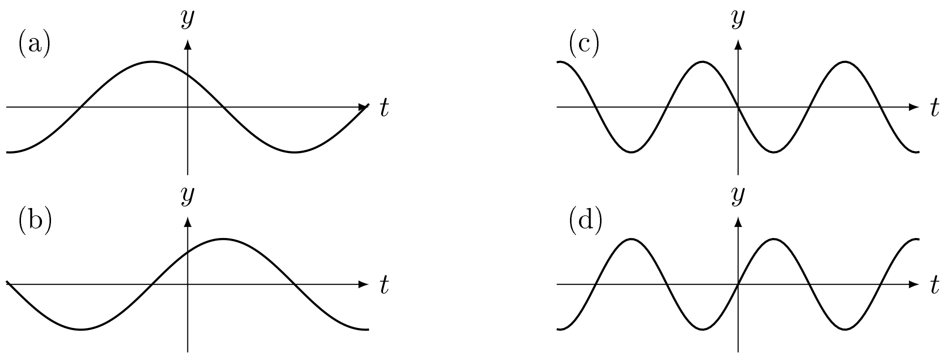
(i) $y = \sin(2x)$
(ii) $y = 2 + \sin(3x)$
(iii) $y = 2\cos(3x)$
(iv) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
(v) $y = 4\sin\left(\frac{x}{3}\right)$
(vi) $y = -\frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)$
(vii) $y = \sin(|x|)$
(viii) $y = |\sin(x)|$

Aufgabe 63

Unten sind die Graphen der vier folgenden Funktionen gezeichnet

(i) $\cos(2t + \pi/2)$
(ii) $\cos(2t - \pi/2)$
(iii) $\cos(t + \pi/4)$
(iv) $\cos(t - \pi/4)$

Man bestimme, welcher Graph zu welcher Funktion gehört. Die Skalierung der Achsen ist für die vier Graphen identisch.



Aufgabe 64

Man bestimme die Periode der folgenden Funktionen und untersuche ob sie gerade oder ungerade sind (Hinweis: Für die Funktion $\tan(x)$ verwenden wir dass sie periodisch ist mit Periode π, auch wenn dies nicht mit unserer Definition von Periodizität vereinbar ist).

(i) $y = \sin(2x)$

(ii) $y = \sin(3x) + \cos(3x)$

(iii) $y = 3\tan(x)$

(iv) $y = 4\sin(3x)$

(v) $y = \cos(3x - \frac{\pi}{2})$

(vi) $y = \sin^2(x)$

6. Lösungen zu den Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

(i) Die Teilmengen von $\{0, 1\}$ sind $\{\}$, $\{0, 1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$. Hier ist $n = 2$ und wir haben $2^2 = 4$ Teilmengen.

(ii) Die Teilmengen von $\{a, b, c, d\}$ sind $\{\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$. Hier ist $n = 4$ und wir haben $2^4 = 16$ Teilmengen.

Lösung zu Aufgabe 2

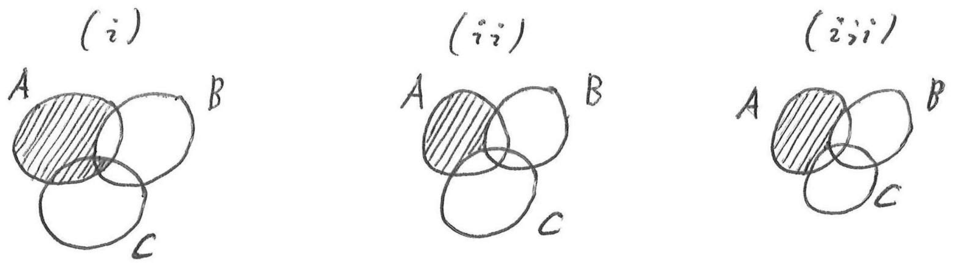
(i) wahr

(ii) wahr

(iii) falsch

(iv) wahr

Lösung zu Aufgabe 3



Lösung zu Aufgabe 4

(i) $A \subset B$

(ii) $A = B$

(iii) $A \subset C \subset B$

Lösung zu Aufgabe 5

(i) $\{\}$

(ii) A

(iii) $A \cap B$

Lösung zu Aufgabe 6

Die Klasse zählt 29 Studenten.

Lösung zu Aufgabe 7

(i) 3

(ii) -1

Lösung zu Aufgabe 8

Der Wert wird nicht überschritten.

Lösung zu Aufgabe 9

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, 0]$
(ii) $\mathbb{L} = [0, \infty)$
(iii) $\mathbb{L} = \{0\}$
(iv) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(v) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(vi) $\mathbb{L} = (-3, 3)$

Lösung zu Aufgabe 10

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, 3)$
(ii) $\mathbb{L} = (0, 3)$
(iii) $\mathbb{L} = (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$

Lösung zu Aufgabe 11

(i) $y = \pm 3$
(ii) $t \in \{-1/2, -9/2\}$
(iii) $s \in \{7/6, 25/6\}$

Lösung zu Aufgabe 12

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(ii) $\mathbb{L} = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$
(iii) $\mathbb{L} = [0, 10]$

Lösung zu Aufgabe 13

Die erste Gleichung ist $|x - (-3)| \leq 2$. Somit sind dies alle x welche von -3 einen Abstand kleiner gleich 2 besitzen. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist also $\mathbb{L}_1 = [-5, -1]$. Aus der zweiten Gleichung folgt $x \geq 4$ oder $x \leq -4$. Also ist die Lösungsmenge der zweiten Gleichung $\mathbb{L}_2 = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = [-5, -4].$$

Lösung zu Aufgabe 14

(i) $D = (-\infty, \infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [1, \infty)$
(ii) $D = [-2, \infty)$, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$
(iii) $D = \mathbb{R}\backslash\{3\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
(iv) $D = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
(v) $D = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$
(vi) $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{-1, 1\}$

Lösung zu Aufgabe 15

(i) $x_\pm = \pm 3$
(ii) $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(iii) $x = 1$

Lösung zu Aufgabe 16

(i) Gerade
(ii) Ungerade
(iii) Ungerade
(iv) Gerade
(v) Gerade
(vi) Gerade
(vii) Weder noch
(viii) Gerade

Lösung zu Aufgabe 17

$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$

Lösung zu Aufgabe 18

Die gesuchten Funktionen müssen die beiden Gleichungen

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{und} \qquad f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen. Daraus folgern wir

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein falls $f(x) = 0$ für alle x. Die Funktion $f(x) = 0$ ist somit die einzige Funktion welche gerade und ungerade ist.

Lösung zu Aufgabe 19

(i) Wir müssen zeigen dass f_1 ungerade und f_2 gerade ist, i.e. wir müssen zeigen dass gilt $f_1(-x) = -f_1(x)$ und $f_2(-x) = f_2(x)$. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $f_1(x)$ ergibt

$$f_1(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f_1(x).$$

Somit ist $f_1(x)$ eine ungerade Funktion. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $f_2(x)$ ergibt

$$f_2(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = f_2(x).$$

Somit ist $f_2(x)$ eine gerade Funktion.

(ii) Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $g_1(x)$ ergibt

$$g_1(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -g_1(x).$$

Somit ist $g_1(x)$ eine ungerade Funktion. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $g_2(x)$ ergibt

$$g_2(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g_2(x).$$

Somit ist $g_2(x)$ eine gerade Funktion.

Lösung zu Aufgabe 20

(i) $p = \pi$
(ii) $p = 4\pi$
(iii) $p = \frac{2\pi}{\omega}$

Lösung zu Aufgabe 21

(i) $a(x) = (x^2-1) \cdot \frac{x}{x^2+1} + x^3$

(ii) $b(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 - 1 + x^3$

(iii) $c(x) = \frac{x^2-1}{(x^2-1)^2+1}$

(iv) $d(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

(v) $e(x) = (x^2-1)^6$

Lösung zu Aufgabe 22

(i) $(g \cdot f)(x) = g(x) \cdot f(x) = (x^3+x+1)\frac{1}{x-1}$. $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{(x^3+x+1)-1} = \frac{1}{x(x^2+1)}$. $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(iii) $x_0 = f^{-1}(11)$ genau dann wenn $f(x_0) = 11$. Somit ist die Gleichung $x_0^3+x_0+1 = 11$ zu lösen. Die Lösung ist $x_0 = 2$.

Lösung zu Aufgabe 23

$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
$x+2$	$3x$	$3x+6$
x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	x
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

Lösung zu Aufgabe 24

(i) $f(g(0)) = 3$

(ii) $f(f(2)) = 2$

(iii) $g(f(3)) = 1$

(iv) $g(f(0)) = 1$

(v) $g(g(-1)) = 0$

(vi) $f(g(1/2)) = 2.5$

Lösung zu Aufgabe 25

(i) Beide Funktionen sind gerade.

(ii) Die Punkte ergeben $h(x) = -\frac{1}{2}x+2$. Damit nun $h(x)+k$ eine ungerade Funktion ist, muss gelten:

$$h(-x) + k = -(h(x) + k),$$

i.e.

$$\frac{1}{2}x + 2 + k = \frac{1}{2}x - 2 - k.$$

Daraus folgt $k = -2$. Ohne Rechnung: Die Funktion kann nur ungerade sein wenn sie durch den Ursprung verläuft. Somit muss k den y-Achsenabschnitt kompensieren, i.e. $k = -2$.

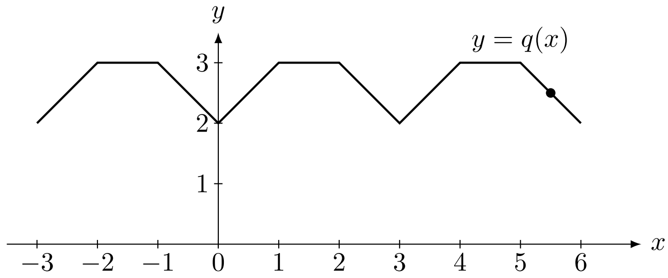
Lösung zu Aufgabe 26

$(g \circ h)(-x) = g(h(-x)) = g(-h(x)) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$, wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen verwenden haben dass h ungerade ist und für das dritte Gleichheitszeichen dass g gerade ist.

LÖSUNG ZU AUFGABE 27

(i) $g(x)$ und $h(x)$ besitzen die Periode $p = 4$. $k(x)$ besitzt die Periode $p = 8$.

(ii)



Wir haben $q(11/2) = 5/2$ (siehe Punkt in der obigen Figur).

LÖSUNG ZU AUFGABE 28

(i) injektiv, nicht surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = [0, 25]$
(ii) injektiv, surjektiv, somit bijektiv $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$
(iii) nicht injektiv, nicht surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = [0, 25]$
(iv) nicht injektiv, surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = [0, 25]$
(v) injektiv, surjektiv, somit bijektiv, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
(vi) nicht injektiv, surjektiv, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

LÖSUNG ZU AUFGABE 29

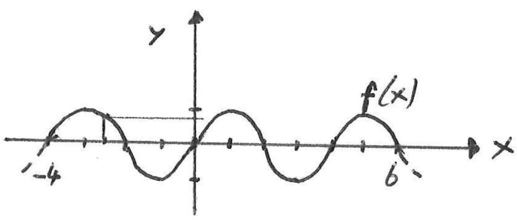
(i) Nicht injektiv.

(ii) Nicht injektiv.

LÖSUNG ZU AUFGABE 30

(i) $f^{-1}(x) = \frac{1}{29}(3 - x)$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x + 29) = \frac{3x-29}{3} + \frac{29}{3} = x$
(ii) $f^{-1}(x) = x^2 + 3$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 + 3 = x$
(iii) $f^{-1}(x) = \frac{4+5x}{2x-1}$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+4}{2x-5}\right) = \frac{4+5\left(\frac{x+4}{2x-5}\right)}{2\left(\frac{x+4}{2x-5}\right)-1} = x$
(iv) $f^{-1}(x) = (x - 6)^{\frac{1}{3}}$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 + 6) = ((x^3 + 6 - 6)^{\frac{1}{3}}) = x$
(v) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = x$

LÖSUNG ZU AUFGABE 31



$f(-2.5) = 3/4$

Lösung zu Aufgabe 32

(i) $D = [0,2]$, $B = [2,3]$

(ii) $D = [0,2]$, $B = [-1,0]$

(iii) $D = [0,2]$, $B = [0,2]$

(iv) $D = [0,2]$, $B = [-1,0]$

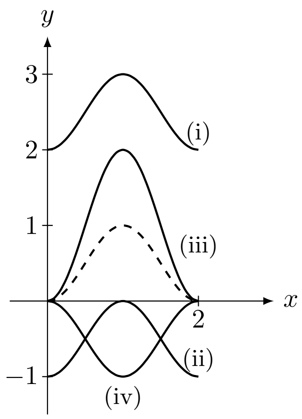
(v) $D = [-3,-1]$, $B = [0,1]$

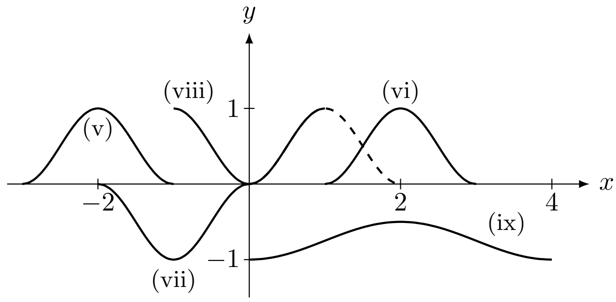
(vi) $D = [1,3]$, $B = [0,1]$

(vii) $D = [-2,0]$, $B = [-1,0]$

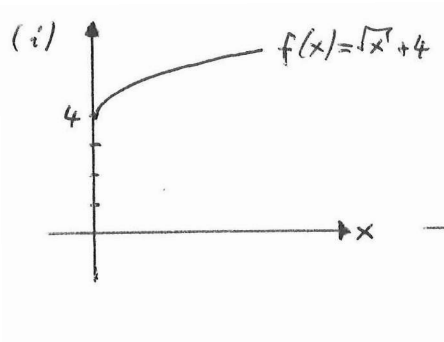
(viii) $D = [-1,1]$, $B = [0,1]$

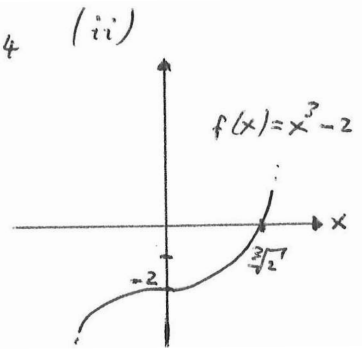
(ix) $D = [0,4]$, $B = [-1,-0.5]$

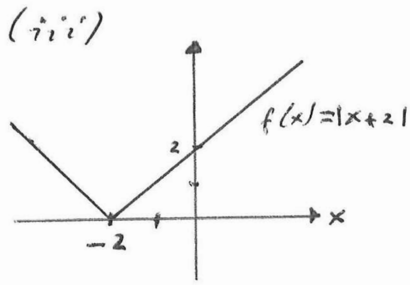


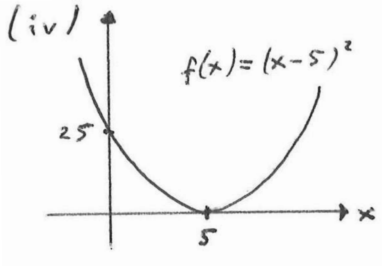


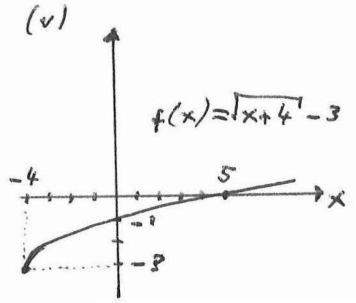
Lösung zu Aufgabe 33

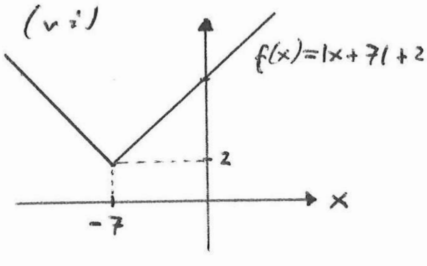


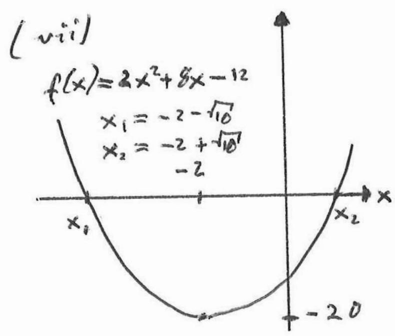


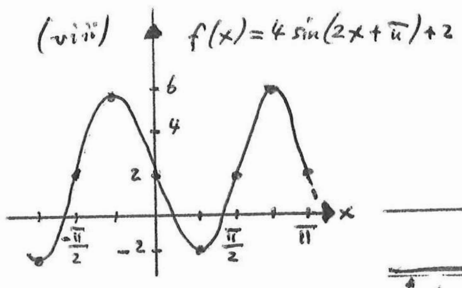


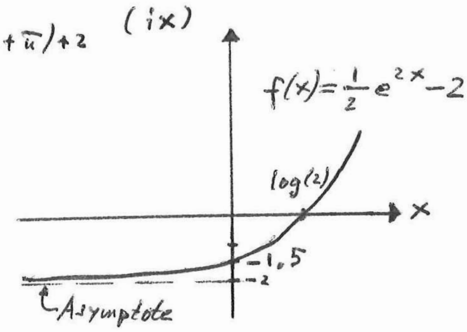












Lösung zu Aufgabe 34

(i) Ausmultiplizieren ergibt $f(x) = -2x^4 - 10x^3 - 6x^2 + 18x$. Somit ist der Grad $n = 4$ und die Koeffizienten sind $a_4 = -2$, $a_3 = -10$, $a_2 = -6$, $a_1 = 18$, $a_0 = 0$.

(ii) $(f + g)(x) = x^2 + 5x + 1$, somit ist der Grad von $(f + g)(x)$ gleich 2.
$(fg)(x) = 2x^3 + 7x^2 + 3x$, somit ist der Grad von $(fg)(x)$ gleich 3.
$f(g(x)) = 4x^2 + 10x + 4$, somit ist der Grad von $f(g(x))$ gleich 2.

(iii) $\max\{m, n\}$, $m + n$, mn (wobei mit $\max\{\ldots\}$ das grösste Element in der Menge gemeint ist.)

Lösung zu Aufgabe 35

(i) h: $y = \frac{3}{5}x - \frac{17}{5}$
(ii) i: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{37}{10}$
(iii) $(3, 1)$

Lösung zu Aufgabe 36

(i) $(f + g)(x) = (M + m)x + B + b$, die Steigung ist somit $M + m$ und der y-Achsenabschnitt ist $B + b$.

(ii) $(f \circ g)(x) = mMx + mB + b$, die Steigung ist somit mM und der y-Achsenabschnitt ist $mB + b$.

(iii) $f(\mu x + \nu y) = m(\mu x + \nu y) = \mu mx + \nu my = \mu f(x) + \nu f(y)$.

Lösung zu Aufgabe 37

Setzt man den Ausdruck $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ in die Funktionsgleichung $y = mx + b$ ein, so erhält man

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + b.$$

Umstellen nach b und einsetzen der Koordinaten (x_1, y_1) für x, y liefert

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

Einsetzen in die Gleichung $y = mx + b$ liefert

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right).$$

Diese Form nennt man auch *Zwei-Punkte-Form*. Falls im zweiten Schritt die Koordinaten (x_2, y_2) gewählt wurden ergibt sich die Gleichung

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \left(y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 \right).$$

Die beiden Gleichungen unterscheiden sich im Ausdruck für b (die geklammerten Terme). Jedoch sind diese Ausdrücke gleich. Dies zeigen wir indem wir die Terme gleich setzen

$$y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

und die Brüche auf die linke Seite bringen

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_2 - y_1,$$

i.e.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) = y_2 - y_1.$$

Der Faktor $x_2 - x_1$ kürzt sich, die Terme sind somit gleich.

Lösung zu Aufgabe 38

$C < \frac{25}{8}$

Lösung zu Aufgabe 39

(i) $x_\pm = -1 \pm 2\sqrt{2}$

(ii) $q_\pm = \frac{5 \pm j\sqrt{107}}{6}$

(iii) $t_+ = \frac{2}{7}$, $t_- = -3$

(iv) $y_\pm = 2 \pm \sqrt{6}$

(v) $x_+ = 0$, $x_- = 16$

Lösung zu Aufgabe 40

Wir schreiben den Ausdruck mit Linearfaktoren hin, verwenden die Lösungsformel und multiplizieren aus:

$$\begin{aligned}
a(x - x_1)(x - x_2) &= a \left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\
&= a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \\
&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right) \\
&= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\
&= a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) \\
&= ax^2 + bx + c,
\end{aligned}$$

wobei wir von der zweiten auf die dritte Zeile die dritte binomische Formel $(s-t)(s+t) = s^2 - t^2)$ verwendet haben.

Lösung zu Aufgabe 41

(i) $x^2 + 8x - 9 = 0$

(ii) $x^2 + 9x + 16 = 0$

(iii) $x^2 - 10x + 34 = 0$

(iv) $49x^2 + 126x + 81 = 0$

Lösung zu Aufgabe 42

(i) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$,
$f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

(ii) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{7}j$, $x_4 = -\sqrt{7}j$,
$f(x) = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{7}j)(x+\sqrt{7}j)$

(iii) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{5}$,
$f(x) = 5(x-1)(x+1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

Lösung zu Aufgabe 43

(i) Wir haben

$$f(g(x)) = (x^2+1)^2 - 5(x^2+1) + 4 = x^4 - 3x^2$$

und $f(g(x)) = 0$ ist die Gleichung $x^4 - 3x^2 = 0$. Die Lösungen können über den Weg der Lösungen biquadratischer Gleichungen gefunden werden oder durch ausklammern: $x^2(x^2-3) = 0$. Die Lösungen sind $x = 0, \pm\sqrt{3}$.

(ii) Die Lösungen der Gleichung sind

$$x_\pm = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4C}}{2}.$$

Somit hat die Gleichung zwei reelle Lösungen genau dann wenn

$$C^2 - 4C > 0.$$

Die quadratische Gleichung $C^2 - 4C = 0$ hat Lösungen $C_1 = 0$, $C_2 = 4$. Somit hat die Gleichung $x^2 + Cx + C = 0$ zwei reelle Lösungen für $C \in \mathbb{R}\backslash[0,4]$.

Lösung zu Aufgabe 44

(i) $y = (x+2)^2 + 1$

(ii) $y = 2\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{31}{32}$

(iii) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$

Lösung zu Aufgabe 45

Wir ergänzen quadratisch:

$$\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.
\end{aligned}$$

Somit sind die Koordinaten des Scheitelpunktes gegeben als $(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

Lösung zu Aufgabe 46

(i) $\mathbb{L} = \{\}$
(ii) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(iii) $\mathbb{L} = (-1, 3)$

Lösung zu Aufgabe 47

(i) Wir betrachten die Funktionsgleichung $y = x^2 - 7x + 12$ und ergänzen quadratisch.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 7x + 12 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7^2}{2^2} + 12 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + \frac{48}{4} \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist die Scheitelpunktsform

$$y + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$$

und die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $S(7/2, -1/4)$.

(ii) Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$x_\pm = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}.$$

Somit sind die Nullstellen von $f(x)$ bei $x = 3$ und bei $x = 4$ und die Produktform der Funktionsgleichung ist

$$y = (x - 3)(x - 4).$$

(iii) Die Parabel zu $f(x)$ ist nach oben geöffnet und schneidet bei $x = 3$ und $x = 4$ die x-Achse. Sie verläuft also im Intervall $(3, 4)$ unterhalb der x-Achse, was negativen Funktionswerten entspricht. Somit besitzt die Ungleichung $f(x) \geq 0$ die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \mathbb{R} \backslash (3, 4).$$

Lösung zu Aufgabe 48

$2x^3 + 8x^2 + 5x + 9 + \frac{1}{x-1}$.

Lösung zu Aufgabe 49

$r = 5$

Lösung zu Aufgabe 50

Wir haben $f(x) = x(2x^2 - 2x - 4) = 0$. Somit ist $x = 0$ eine Nullstelle und die weiteren Nullstellen werden durch das Lösen der Gleichung $2x^2 - 2x - 4 = 0$ gefunden. Es folgt $f(x) = 2x(x - 2)(x + 1)$.

Lösung zu Aufgabe 51

$f(x) = (x-6)(x-2)(x+5)$.

Lösung zu Aufgabe 52

Hier fehlt eine Nullstelle. Wir spalten zuerst die gegebenen Nullstellen ab. Polynomdivision ergibt $(2x^3 - 22x^2 + 78x - 90) : (x-5) = 2x^2 - 12x + 18$. Weitere Polynomdivision ergibt $(2x^2 - 12x + 18) : (x-3) = 2x - 6$. Somit ist die dritte Nullstelle bei $x = 3$ (i.e. $x = 3$ ist eine doppelte Nullstelle) und wir haben also $f(x) = 2(x-3)^2(x-5)$.

Lösung zu Aufgabe 53

$f(x) = (x-2)(x-1)^3$.

Lösung zu Aufgabe 54

$f(x) = \frac{4x^4 - 2x + 5}{x^2 - 3x - 1} = 4x^2 + 12x + 40 + \frac{130x + 45}{x^2 - 3x - 1}$

Lösung zu Aufgabe 55

(i) Die Definitionslücken sind die Nullstellen der ungekürzten Funktion. Somit besitzt $f(x)$ bei $x = -1$ eine Definitionslücke. Nun prüfen wir ob Kürzen möglich ist indem wir den Zähler als Produkt von Linearfaktoren schreiben. Dazu benötigen wir die Nullstellen von $g(x)$. Eine davon ist gegeben durch die Angabe $g(3) = 0$, i.e. bei $x = 3$. Abspalten der Nullstelle mittels Polynomdivision ergibt

$$(-x^3 - x^2 + 8x + 12) : (x-3) = -x^2 - 4x - 4.$$

Die weiteren Nullstellen findet man durch die Gleichung

$$-x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen ergibt

$$x_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{-2} = -2,$$

wobei es sich um eine doppelte Nullstelle handelt, da die Diskriminante verschwindet. Somit gilt $h(x) = (-x^3 - x^2 + 8x + 12) = -(x-3)(x+2)^2$ und

$$f(x) = -\frac{(x-3)(x+2)^2}{x+1}.$$

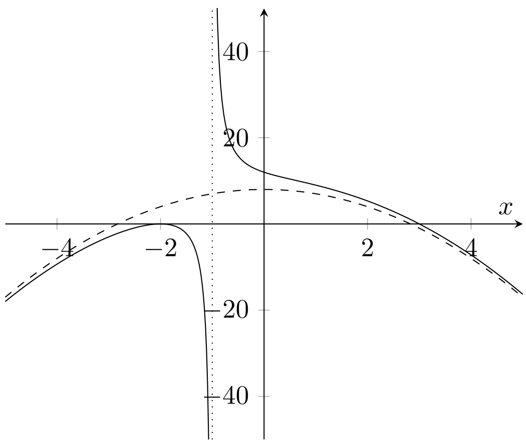
Wir sehen dass nicht gekürzt werden kann und die Nullstellen von $f(x)$ sind bei $x = 3$ und bei $x = -2$ (doppelt). Die Polstellen sind die Nullstellen des Nenners der gekürzten Funktion, somit hat $f(x)$ eine Polstelle bei $x = -1$.

(ii) Polynomdivision ergibt

$$(-x^3 - x^2 + 8x + 12) : (x+1) = -x^2 + 8 + \frac{4}{x+1}.$$

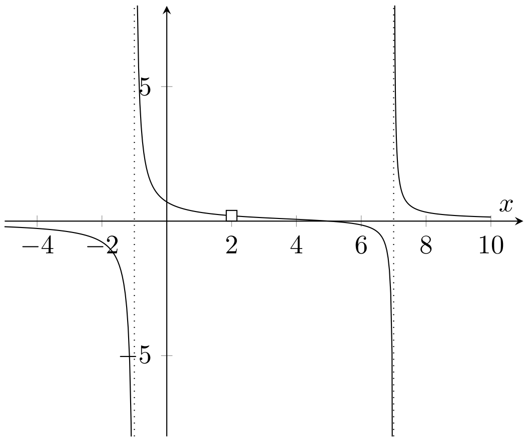
Somit ist die Asymptote $y = -x^2 + 8$.

(iii)



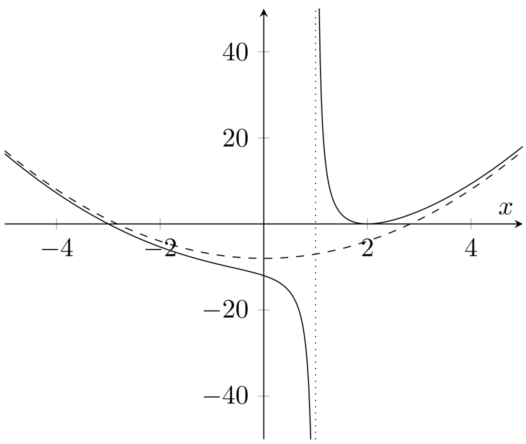
Lösung zu Aufgabe 56

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 2, 7\}$, Nullstellen sind $x = 5$. Polstellen sind $x = -1$ und $x = 7$. Der Graph der Funktion ist (mit dem weissen Viereck wird die Definitionslücke angedeutet):



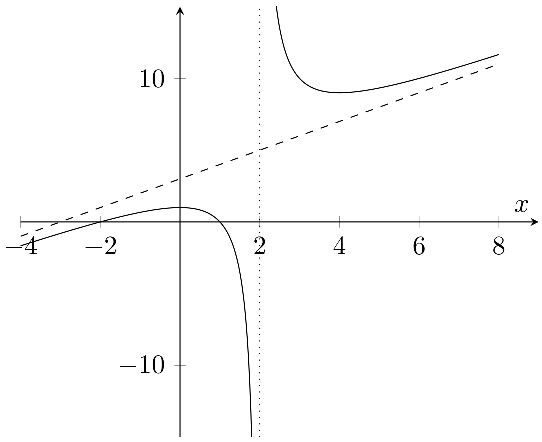
Lösung zu Aufgabe 57

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, Nullstellen sind bei $x = 2$ (doppelt) und $x = -3$. Polstelle ist bei $x = 1$, Asymptoten gegeben durch die Funktion $y = x^2 - 8$.



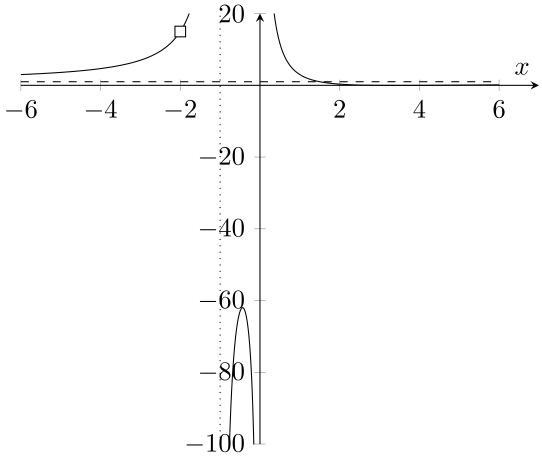
Lösung zu Aufgabe 58

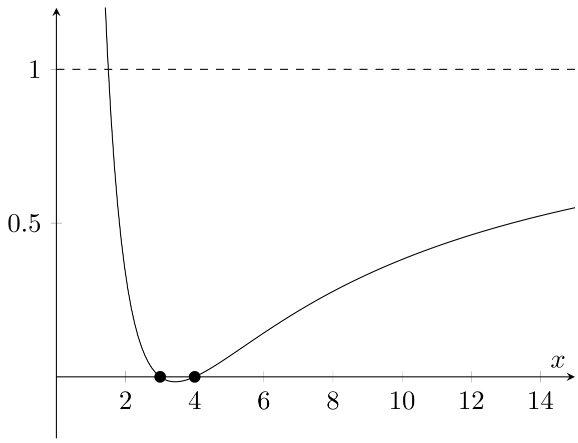
Nullstellen bei $x = -2$ und $x = 1$, Polstelle bei $x = 2$ und Asymptote gegeben durch $y = x + 3$. Graph:



Lösung zu Aufgabe 59

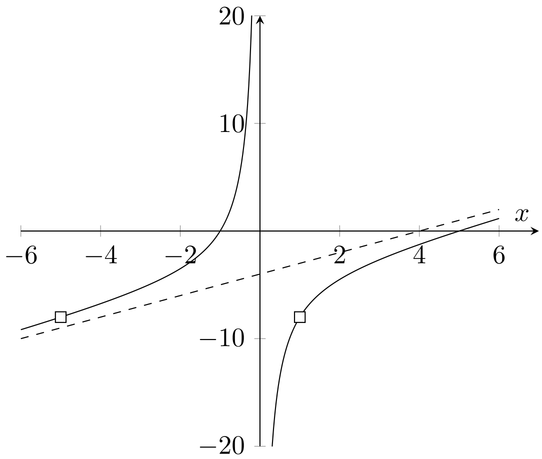
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$, Nullstellen sind bei $x = 4$ und $x = 3$, Pole sind bei $x = 0$ und $x = -1$. Die Asymptote ist $y = 1$. Graph (die zweite Abbildung zeigt den Ausschnitt für $x \in (0, 15)$ um die Lage der Nullstellen (schwarze Punkte) zu verdeutlichen)





Lösung zu Aufgabe 60

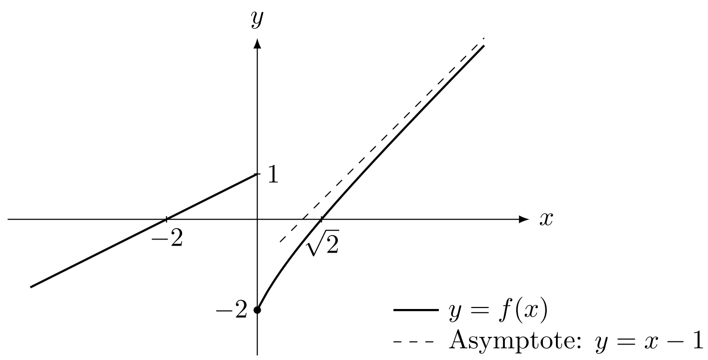
Nullstellen sind bei $x = 5$ und $x = -1$. Pol bei $x = 0$. Asymptote ist $y = x - 4$. Graph:



Lösung zu Aufgabe 61

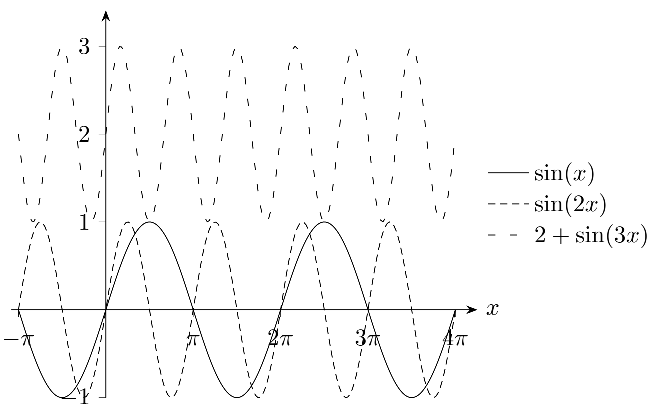
(i) $f(1) = -1/2$, $(f(1))^2 = 1/4$, $f(f(1)) = f(-1/2) = 3/4$.

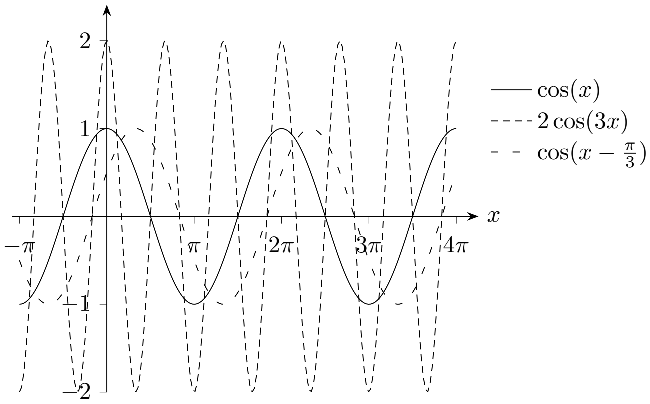
(ii) Die Funktion $\frac{x^2-2}{x+1} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x+1} = x - 1 - \frac{1}{x+1}$ besitzt bei $x = -1$ eine Polstelle, bei $x = \pm\sqrt{2}$ eine Nullstelle und die Asymptote ist $y = x - 1$.

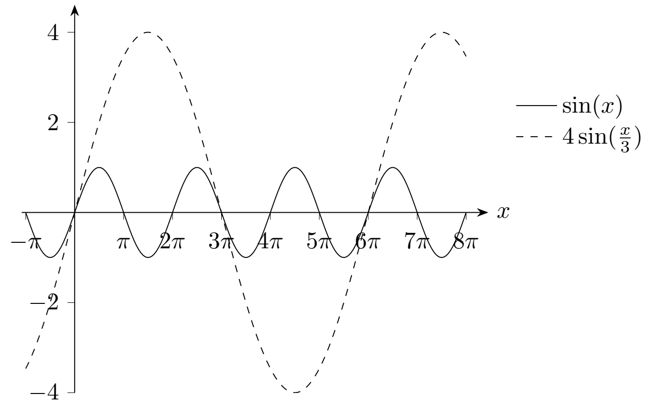


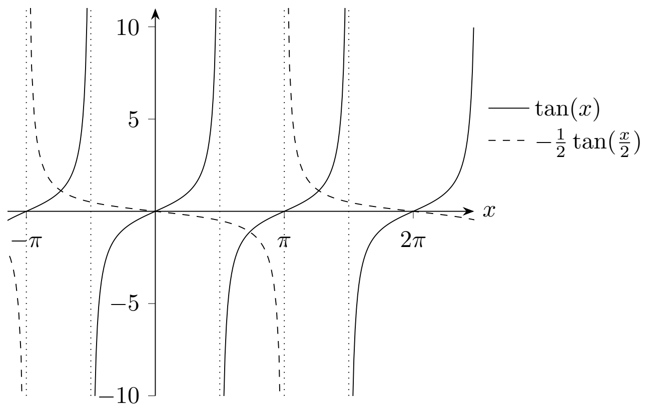
(iii) $f(x)$ ist nicht injektiv. Begründung durch Test mit horizontaler Geraden am Graphen: Wird die horizontale Gerade im Bereich $y \in (-2, 1)$ gelegt, so ergeben sich zwei Schnittpunkte. Beispielsweise die Gerade $y = 0$ schneidet den Graphen bei $x = -2$ und $x = \sqrt{2}$, i.e. $f(-2) = f(\sqrt{2}) = 0$.

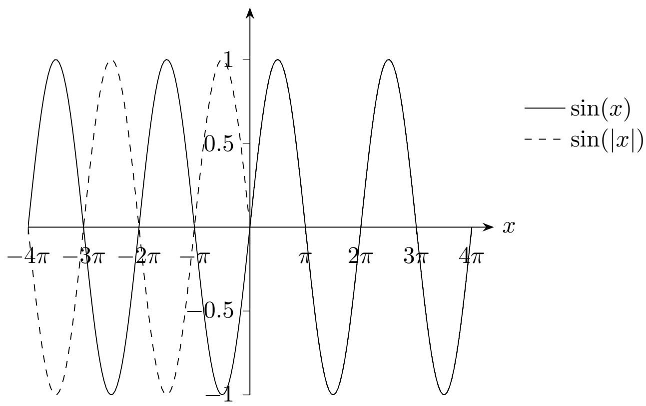
Lösung zu Aufgabe 62

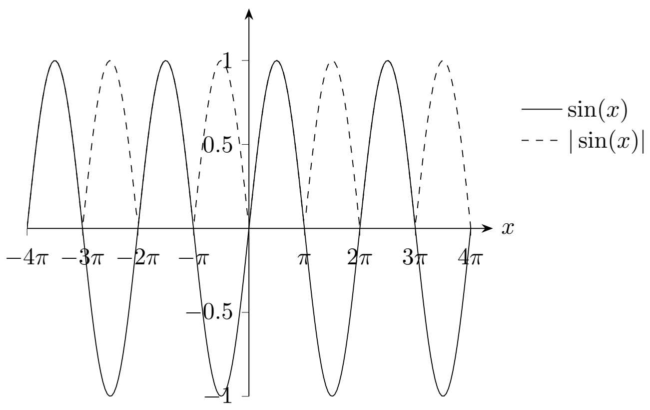



2
1
−1
−2
−π
π
2π
3π
4π
x
cos(x)
2 cos(3x)
cos(x − π/3)


4
2
−2
−4
−π
π
2π
3π
4π
5π
6π
7π
8π
x
sin(x)
4 sin(x/3)


10
5
−5
−10
−π
π
2π
x
tan(x)
−1/2 tan(x/2)


1
0.5
−0.5
−1
−4π
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
4π
x
sin(x)
sin(|x|)



Lösung zu Aufgabe 63

(i)(c), (ii)(d), (iii)(a), (iv)(b)

Lösung zu Aufgabe 64

(i) π, ungerade
(ii) $\frac{2\pi}{3}$, weder gerade noch ungerade
(iii) π, ungerade
(iv) $\frac{2\pi}{3}$, ungerade
(v) $\frac{2\pi}{3}$, ungerade
(vi) π, gerade