ANALYSIS 1
VERSION 22. September 2021

LISIBACH ANDRÉ

Das Gewicht der Vorlesung liegt auf konkreten Rechnungen und weniger auf abstrakten Formulierungen. Deshalb befinden sich im Skript viele Rechenbeispiele und weitere werden im Unterricht besprochen. Wir benutzen Kursivschrift für Begriffsdefinitionen.

1. Mengenlehre

1.1. **Grundbegriffe.** Unter einer *Menge* verstehen wir die Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte, *Elemente* genannt, zu einer Einheit. Beschreibende Darstellungsform:

$$M = \{x | x \text{ besitzt die Eigenschaften } E_1,\ E_2, \ldots, E_n\},$$

aufzählende Form:

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}.$$

Mengen mit unendlich vielen Elementen, wie zum Beispiel die Menge der reellen Zahlen, sind möglich. Im folgenden bezeichnen wir die reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. $a \in A$ bedeutet a ist Element von A, $a \notin A$ bedeutet a ist kein Element von A. Die *leere Menge* wird mit $\{\}$ oder $\emptyset$ bezeichnet. Eine Menge A heisst *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch ein Element von B ist, geschrieben $A \subset B$.

Als Beispiel betrachten wir die Teilmengen der Menge $B = \{a, b, c\}$. Die acht Teilmengen sind

$$\begin{array}{lll} P = \{a\}, & Q = \{b\}, & R = \{c\}, \\ S = \{a, b\}, & T = \{b, c\}, & U = \{a, c\}, \\ V = \{\}, & W = \{a, b, c\}. & \end{array}$$

Für jede Menge B gilt:

(i) Die leere Menge ist immer eine Teilmenge der Menge B.
(ii) Die Menge B ist eine Teilmenge der Menge B.
(iii) Besteht die Menge B aus n Elementen, so besitzt die Menge B genau 2^n Teilmengen.

Im folgenden werden wir häufig Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachten. *Intervalle* sind zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen. Wir verwenden dafür die Notationen

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} | a < x\}, \\ (\infty, \infty) &= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Man nennt ein Intervall der Form (a, b) *offenes Intervall* und ein Intervall der Form $[a, b]$ *abgeschlossenes Intervall.*

1.2. **Mengenoperationen.**

1.2.1. *Schnittmenge.* Die Menge $A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$ heisst *Schnittmenge* der Mengen A und B.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die Lösungsmenge des Ungleichungssystems:

$$\begin{cases} 2x - 4 < & 8 \\ x + 1 > & -2 \end{cases}$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $x < 6$. Wir bezeichnen die Menge der x welche die erste Ungleichung erüllt mit $\mathbb{L}_1$. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1 &= \{x | x \in \mathbb{R}, x < 6\} \\ &= (-\infty, 6). \end{aligned}$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt $x > -3$. Wir bezeichnen nun die Menge der x welche die zweite Ungleichung erfüllt mit $\mathbb{L}_2$. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_2 &= \{x | x \in \mathbb{R}, x > -3\} \\ &= (-3, \infty). \end{aligned}$$

Die Lösung des Ungleichungssystems ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \\ &= \{x | x \in \mathbb{R}, x < 6, x > -3\} \\ &= (-3, 6). \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel dient das Ungleichungssystem (siehe Unterricht)

$$\begin{cases} x^2 \leq 9 \\ 2x - 3 \leq 1 \end{cases}$$

1.2.2. *Vereinigungsmenge.* Die Menge $A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$ ist die *Vereinigungsmenge* der Mengen A und B.

Als Beispiel betrachten wir die folgenden beiden Ungleichungen

$$x^2 \geq 1, \qquad 2x > -4.$$

Welche x erfüllen mindestens eine der beiden Ungleichungen? Die erste Ungleichung ergibt $x \geq 1$ oder $x \leq -1$. Die zweite Ungleichung ergibt $x > -2$. Somit haben wir

$$\mathbb{L}_1 = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \qquad \mathbb{L}_2 = (-2, \infty)$$

und für die Lösungsmenge des Ungleichungssystems erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \\ &= (-\infty, \infty) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.3. *Differenzmenge.* Die Menge $A \backslash B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ ist die *Differenzmenge* der Mengen A und B.

Beispiel: Die Menge der natürlichen Zahlen mit Null ist $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null ist $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dann ist $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_0 \backslash \{0\}$.

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Definitionsbereich (als Teilmenge der reellen Zahlen) der Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)x(x+3)}, \qquad g(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{x}.$$

Da Division durch Null nicht erlaubt ist sehen wir dass $f(x)$ nicht definiert ist für $x = -3, 0, 1$. Somit ist der Definitionsbereich von $f(x)$

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-3, 0, 1\}.$$

Man sagt $f(x)$ besitze bei $x = -3, 0, 1$ *Definitionslücken.* Allerdings kann wegen

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)x(x+3)} = \frac{x}{(x-1)(x+3)},$$

die Definitionslücke bei $x = 0$ behoben werden und es gilt $f(0) = 0$. Da für reelle Funktionswerte das Argument der Wurzel nicht negativ sein darf ist $g(x)$ nur für $x \geq 0$ definiert. Der Definitionsbereich von $g(x)$ ist somit

$$\mathbb{D}_g = [0, \infty) \backslash \{1\}.$$

1.3. **Betrag einer reellen Zahl.** Der *Betrag* einer reellen Zahl a ist durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0, \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$$

definiert. Beispiele: $|7| = 7$, $|-9| = 9$. Die Lösung der Ungleichung $|x - 7| \leq 2$ ist $\mathbb{L} = [5, 9]$. Die Lösung der Ungleichung $|x + 5| \leq 2$ ist $\mathbb{L} = [-7, -3]$. Der Betrag der Differenz von $a - b$, also $|a - b|$ ist der Abstand (positiv) zwischen den Zahlen a und b.

2. Aufgaben

Aufgabe 1

Man bestimme alle Teilmengen von (i) $\{0, 1\}$ und (ii) $\{a, b, c, d\}$.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) $(A \cap B) \subset A$

(ii) $A \subset (A \cup B)$

(iii) $(A \cup B) \subset [(A \cup B) \backslash A]$

(iv) $(A \backslash B) \cap B = \{\}$

Aufgabe 3

Man schraffiere in einem Mengendiagramm

(i) $A \backslash (B \backslash C)$

(ii) $(A \backslash B) \backslash C$

(iii) $A \backslash (B \cup C)$

Aufgabe 4

Was lässt sich über die Mengen A, B und C aussagen, wenn folgendes gilt

(i) $(A \backslash B) \subset (A \cap B)$

(ii) $A \cap B = A \cup B$

(iii) $(A \backslash C) \cup (C \backslash B) = \{\}$

Aufgabe 5

Man vereinfache

(i) $(A \cap B) \cap (A \backslash B)$

(ii) $(A \cap B) \cup (A \backslash B)$

(iii) $A \backslash (A \backslash B)$

Aufgabe 6

Von den Studenten einer Klasse (K) spielen 14 Fussball (F), 12 Handball (H), 8 Basketball (B), 4 Fussball und Handball, 8 Handball und Basketball, 2 Fussball und Handball und Basketball, 7 weder Fussball noch Handball noch Basketball. Wieviele Studenten zählt die Klasse?

Aufgabe 7

Man berechne $|2 - a| - |b + 1| + |a + b|$ mit den Werten

(i) $a = 3$, $b = 5$

(ii) $a = 2$, $b = -4$

Aufgabe 8

Man überprüfe ob der Wert des Ausdrucks $(3-a)(b+ac)$ unter den Bedingungen $|a| \leq 2$, $|b| \leq 5$ und $|c| \leq 4$ den Wert 80 überschreitet.

Aufgabe 9

Für welche reellen Zahlen gilt

(i) $|x| = -x$
(ii) $|x| = x$
(iii) $x = -x$
(iv) $|x| = |-x|$
(v) $|x|^2 = x^2$
(vi) $|x| < 3$

Aufgabe 10

Man bestimme die folgenden Mengen (als Intervall/Ausdruck von Intervallen)

(i) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3) < 0\}$
(ii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)x < 0\}$
(iii) $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | (x-3)(x-5) \geq 0\}$

Aufgabe 11

Man löse die folgenden Gleichungen

(i) $|y| = 3$
(ii) $|2t+5| = 4$
(iii) $|8-3s| = 9/2$

Aufgabe 12

Man löse die folgenden Ungleichungen

(i) $|2s| \geq 4$
(ii) $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$
(iii) $\left|\frac{z}{5} - 1\right| \leq 1$

Aufgabe 13

Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems gegeben durch die beiden folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} |x+3| &\leq 2, \\ x^2 &\geq 16. \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Bestimmen sie den grösstmöglichen Definitionsbereich und das zugehörige Bild von

(i) $f(x) = 1 + x^2$
(ii) $g(x) = \sqrt{5x+10}$
(iii) $h(t) = \dfrac{4}{3-t}$
(iv) $f(x) = 5 - 2x$
(v) $g(x) = \sqrt{|x|}$
(vi) $h(t) = t/|t|$

Aufgabe 15

Man bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen.

(i) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+1}$
(ii) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
(iii) $f(x) = (x-1)e^x$

Aufgabe 16

Man bestimme für die folgenden Funktionen das Symmetrieverhalten.

(i) $f(x) = 4x^2 - 16$
(ii) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$
(iii) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$
(iv) $f(x) = |x^2 - 4|$
(v) $f(x) = \frac{x^2-1}{1+x^2}$
(vi) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$
(vii) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
(viii) $f(x) = 4\sin^2(x)$

Aufgabe 17

Sei f eine gerade Funktion und sei g eine ungerade Funktion. Man zeige dass fg eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 18

Man finde alle Funktionen welche gerade und ungerade sind.

Aufgabe 19

(i) Seien

$$f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Man zeige dass $f_1(x)$ eine ungerade und $f_2(x)$ eine gerade Funktion ist.

(ii) Sei $f(x)$ eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Seien

$$g_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \qquad g_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Man zeige dass $g_1(x)$ eine ungerade und $g_2(x)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 20

Man bestimme die Periode p der folgenden Funktionen

(i) $f(x) = \sin(2x)$
(ii) $f(x) = \sin(x/2)$
(iii) $i(t) = I\sin(\omega t + \phi_0)$, wobei I, $\omega, \phi_0 \in \mathbb{R}$ konstanten sind.

3. Lösungen zu den Aufgaben

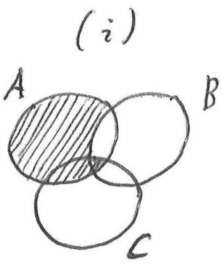
Lösung zu Aufgabe 1

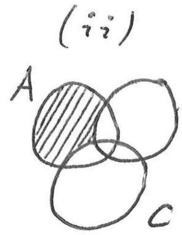
(i) Die Teilmengen von $\{0, 1\}$ sind $\{\}$, $\{0, 1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$. Hier ist $n = 2$ und wir haben $2^2 = 4$ Teilmengen.
(ii) Die Teilmengen von $\{a, b, c, d\}$ sind $\{\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$. Hier ist $n = 4$ und wir haben $2^4 = 16$ Teilmengen.

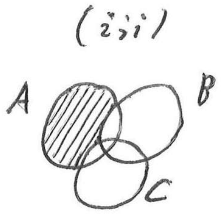
Lösung zu Aufgabe 2

(i) wahr
(ii) wahr
(iii) falsch
(iv) wahr

Lösung zu Aufgabe 3







Lösung zu Aufgabe 4

(i) $A \subset B$
(ii) $A = B$
(iii) $A \subset C \subset B$

Lösung zu Aufgabe 5

(i) $\{\}$
(ii) A
(iii) $A \cap B$

Lösung zu Aufgabe 6

Die Klasse zählt 29 Studenten.

Lösung zu Aufgabe 7

(i) 3
(ii) -1

Lösung zu Aufgabe 8

Der Wert wird nicht überschritten.

Lösung zu Aufgabe 9

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, 0]$
(ii) $\mathbb{L} = [0, \infty)$
(iii) $\mathbb{L} = \{0\}$
(iv) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(v) $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
(vi) $\mathbb{L} = (-3, 3)$

Lösung zu Aufgabe 10

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, 3)$
(ii) $\mathbb{L} = (0, 3)$
(iii) $\mathbb{L} = (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$

Lösung zu Aufgabe 11

(i) $y = \pm 3$
(ii) $t \in \{-1/2, -9/2\}$
(iii) $s \in \{7/6, 25/6\}$

Lösung zu Aufgabe 12

(i) $\mathbb{L} = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
(ii) $\mathbb{L} = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$
(iii) $\mathbb{L} = [0, 10]$

Lösung zu Aufgabe 13

Die erste Gleichung ist $|x - (-3)| \leq 2$. Somit sind dies alle x welche von -3 einen Abstand kleiner gleich 2 besitzen. Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist also $\mathbb{L}_1 = [-5, -1]$. Aus der zweiten Gleichung folgt $x \geq 4$ oder $x \leq -4$. Also ist die Lösungsmenge der zweiten Gleichung $\mathbb{L}_2 = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$. Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = [-5, -4].$$

Lösung zu Aufgabe 14

(i) $D = (-\infty, \infty)$, $\mathrm{Im}(f) = [1, \infty)$
(ii) $D = [-2, \infty)$, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$
(iii) $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
(iv) $D = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
(v) $D = \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(g) = [0, \infty)$
(vi) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Im}(h) = \{-1, 1\}$

Lösung zu Aufgabe 15

(i) $x_\pm = \pm 3$
(ii) $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
(iii) $x = 1$

Lösung zu Aufgabe 16

(i) Gerade
(ii) Ungerade
(iii) Ungerade
(iv) Gerade
(v) Gerade
(vi) Gerade
(vii) Weder noch
(viii) Gerade

Lösung zu Aufgabe 17

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$$

Lösung zu Aufgabe 18

Die gesuchten Funktionen müssen die beiden Gleichungen

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{und} \qquad f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen. Daraus folgern wir

$$f(x) = f(-x) = -f(x).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein falls $f(x) = 0$ für alle x. Die Funktion $f(x) = 0$ ist somit die einzige Funktion welche gerade und ungerade ist.

Lösung zu Aufgabe 19

(i) Wir müssen zeigen dass f_1 ungerade und f_2 gerade ist, i.e. wir müssen zeigen dass gilt $f_1(-x) = -f_1(x)$ und $f_2(-x) = f_2(x)$. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $f_1(x)$ ergibt

$$f_1(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f_1(x).$$

Somit ist $f_1(x)$ eine ungerade Funktion. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $f_2(x)$ ergibt

$$f_2(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = f_2(x).$$

Somit ist $f_2(x)$ eine gerade Funktion.

(ii) Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $g_1(x)$ ergibt

$$g_1(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -g_1(x).$$

Somit ist $g_1(x)$ eine ungerade Funktion. Einsetzen von $-x$ anstelle von x in $g_2(x)$ ergibt

$$g_2(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g_2(x).$$

Somit ist $g_2(x)$ eine gerade Funktion.

Lösung zu Aufgabe 20

(i) $p = \pi$
(ii) $p = 4\pi$
(iii) $p = \frac{2\pi}{\omega}$